# بسم الله الرحمن الرحيم

والصلاة والسلام على أشرف المخلوقين محمد سيد المرسلين وعلى آله وصحبه أجمعين

أما بعد ، يستمر مسلسل الكتب المفهرسة ، بتقديم هذا العمل المتواضع وهو عبارة على 15 امتحان تجريبي مع الحلول في الرياضيات لمستوى الثانية بكالوريا علوم تجريبية مجمعة في كتاب واحد مفهرس لتصفح أي موضوع اضغط على عنوانه في الفهرس

وللرجوع إلى الفهرس إضغط على

تجميع وترتيب وفهرست

ALMOHANNAD

عضو بمنتديات دفاتر

ملاحظات:

- تعتبر الدالة Arctan خارج المقرر

- تعتبر المكاملة بتغيير المتغير خارج المقرر

- تعتبر المعادلات التفاضلية بطرف ثان خارج المقرر

# الفهرس

R

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ورزازات | : | النيابـــة | محمد الحيان | : | الأستاذ |
| 3 ساعات | : | مدة الإنجاز | الرياضيـــــــــــــــات | : | المادة |
| 7 | : | المعامـل | الثانية بكالوريا علوم فيزيائية<br>الثانية بكالوريا علوم الحياة والأرض | : | الشعبة |

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
قطاع التعليم المدرسي

الامتحـــــان التجريبي للبكالوريـــــــــا
25 مارس 2008

## التمريـــــــــــــــــن الـــــــــــــــــأول: 3,5 ن

0,5 — 1. أ- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\} \quad : \quad \dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}=2x+1+\dfrac{1}{x+1}$ .

1 — ب- استنتج قيمة التكامل : $I=\int_0^1\left(\dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}\right)dx$

1 — 2. باستعمال المكاملة بالأجزاء ، أحسب التكامل التالي : $J=\int_0^1 xe^{-x}dx$

1 — 3. أحسب التكامل : $K=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\dfrac{1}{x}\left|\ln(x)\right|dx$

## التمريـــــــــــــــــن الثانـــــــــــــــــي: 6 نقط

لكل $z$ من المجموعة $\mathbb{C}$ ، نضع : $P(z)=z^3-(8+3i)z^2+(25+24i)z-75i$

0,75 — 1. حل في المجموعة ، المعادلة التالية : $(E) \quad : \quad z^2-8z+25=0$

0,75 — 2. بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا $z_0$ صرفا يجب تحديده.

0,5 — 3. حدد العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث : $\forall z\in\mathbb{C} \quad : \quad P(z)=(z-3i)(z^2+az+b)$

4. نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ التي ألحاقها على التوالي هي : $z_A=-1+2i$ و $z_B=4+3i$ و $z_C=3i$ و $z_D=4-3i$ .

0,5 — أ- مثل النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$.

1 — ب- بين أن : $\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\dfrac{1}{5}i$ و أن : $\dfrac{z_C-z_B}{z_D-z_B}=-\dfrac{2}{3}i$ .

1 — جـ- استنتج طبيعة المثلثين $ACD$ و $BCD$ .

1 — د- بين أن النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ تنتمي إلى دائرة $(\Gamma)$ محددا شعاعها ولحق مركزها.

0,5 — 5. نعتبر الإزاحة $t$ التي متجهتها $\overrightarrow{AD}$ . حدد لحق النقطة $E$ صورة النقطة $C$ بالإزاحة $t$ .

**التمريـــــــــــــــــــن الثالـــــــــــــــــــــــــــــــث:** **10,5 ن**

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\ln\left(1-x^{3}\right) & ; \quad x<0 \\ f(x)=4x\sqrt{x}-3x^{2} & ; \quad x\geq 0 \end{cases}$$

وليكن $\left(\mathscr{C}_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوى $\mathscr{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ - بين أن $f$ متصلة في النقطة 0 . — 0,5

ب- بين أن الدالة $f$ قابلة للإشتقاق في النقطة 0 . ( نذكر بأن : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$ ) — 1

2. بين أن الدالة تناقصية على كل من المجالين $\left]-\infty,0\right[$ و $\left[1,+\infty\right[$ ، وتزايدية على المجال $\left[0,1\right]$ . — 1,5

3. أ- أحسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ . — 1

ب- تحقق من أن : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{3\ln(-x)}{x}+\dfrac{\ln\left(1-x^{-3}\right)}{x} \quad : \quad \forall x\in\left]-\infty,0\right[$ . — 0,5

جـ- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $\left(\mathscr{C}_f\right)$ . — 1

4. أنشئ المنحنى $\left(\mathscr{C}_f\right)$ . — 1

5. ليكن $h$ قصور الدالة $f$ على المجال $\left]-\infty,0\right[$ .

أ- بين أن $h$ تقبل دالة عكسية $h^{-1}$ معرفة على مجال $J$ يتم تحديده. — 0,5

ب- حدد $h^{-1}(x)$ لكل $x$ من المجال $J$. — 1

6. نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{4}{9} \\ u_{n+1}=4u_n\sqrt{u_n}-3u_n^2 & ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين بالترجع أن : $\dfrac{4}{9}\leq u_n\leq 1 \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$ . — 0,75

ب- بين أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية . — 0,75

جـ- استنتج أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ، ثم أحسب نهايتها. — 1

## التمرين الأول :

1. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$ . لدينا : $2x+1+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{(2x+1)(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{2x^2+2x+x+1+1}{x+1}=\dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}$ .

ب- لدينا : $\int_0^1 \dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}dx=\int_0^1 2x+1+\dfrac{1}{x+1}dx=\left[x^2+x+\ln(|x+1|)\right]_0^1=\boxed{2+\ln 2}$ .

2. باستعمال المكاملة بالأجزاء ، نجد :

$$J=\int_0^1 xe^{-x}dx=\int_0^1 x\left(-e^{-x}\right)'dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 x'\left(e^{-x}\right)dx$$

$$J=-e^{-1}-\int_0^1 -e^{x}dx=-e^{1}-\left[e^{-x}\right]_0^1=-e^{-1}-\left(e^{-1}-1\right)=\boxed{1-\frac{2}{e}}$$

3. لنحدد إشارة $\ln x$ على المجال $\left[\frac{1}{e},e\right]$ . لدينا :

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{e}$ | $1$ | $e$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

باستعمال علاقة شال ، نحصل على ما يلي :

$$K=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}|\ln x|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}|\ln(x)|dx+\int_1^e\frac{1}{x}|\ln(x)|dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}\ln(x)dx+\int_1^e\frac{1}{x}\ln(x)dx$$

$$=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\ln(x)\right)'\ln(x)dx+\int_1^e\left(\ln(x)\right)'\ln(x)dx$$

$$K=-\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=-\left(0-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-0\right)=\boxed{1}$$

## التمرين الثاني :

لكل $z$ من $\mathbb{C}$ ، نضع : $P(z)=z^3-(8+3i)z^2+(25+24i)z-75i$ .

1. لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E)\ :\ z^2-8z+25=0$ .

لدينا : $\Delta'=b'^2-ac=(-4)^2-1\times 25=16-25=-9=(3i)^2$ . إذن : للمعادلة $(E)$ حلين عقديين مترافقين هما :

$z_1=\dfrac{-b'+i\sqrt{-\Delta'}}{a}=4+3i$ و $z_2=\dfrac{-b'-i\sqrt{-\Delta'}}{a}=4-3i$ .

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $(E)$ هي : $S=\{4-3i\ \ ,\ \ 4+3i\}$ .

2. ليكن $z_0=iy$ بحيث $y\in\mathbb{R}$ ، حلا تخيليا صرفا للمعادلة $P(z)=0$ . إذن :

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow z_0^3-(8+3i)z_0^2+(25+24i)z_0-75i=0$$
$$\Leftrightarrow (iy)^3-(8+3i)(iy)^2+(25+24i)(iy)-75i=0$$
$$\Leftrightarrow (8y^2-24y)+i(-y^3+3y^2+25y-75)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8y^2-24y=0 \\ -y^3+3y^2+25y-75=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8y(y-3)=0 \\ -y^3+3y^2+25y-75=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \quad \text{أو} \quad y=3 \\ -y^3+3y^2+25y-75=0 \end{cases}$$
$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow \boxed{y=3}$$

وبالتالي فإن $\boxed{z_0=3i}$ هو حل تخيلي صرف للمعادلة $P(z)=0$ .

3. لدينا $z_0=3i$ جذر للحدودية $P(z)$ . إذن $P(z)$ تقبل القسمة على $z-3i$ .

**طريقة 1 :** القسمة الأقليدية.

$$\begin{array}{rl|l} & P(z)=z^3-(8+3i)z^2+(25+24i)z-75i & z-3i \\ \hline - & z^3-3iz^2 & z^2-8z+25 \\ \hline & -8z^2+(25+24i)z-75i & \\ - & -8z^2+24iz & \\ \hline & 25z-75i & \\ - & 25z-75i & \\ \hline & 0 \quad 0 & \end{array}$$

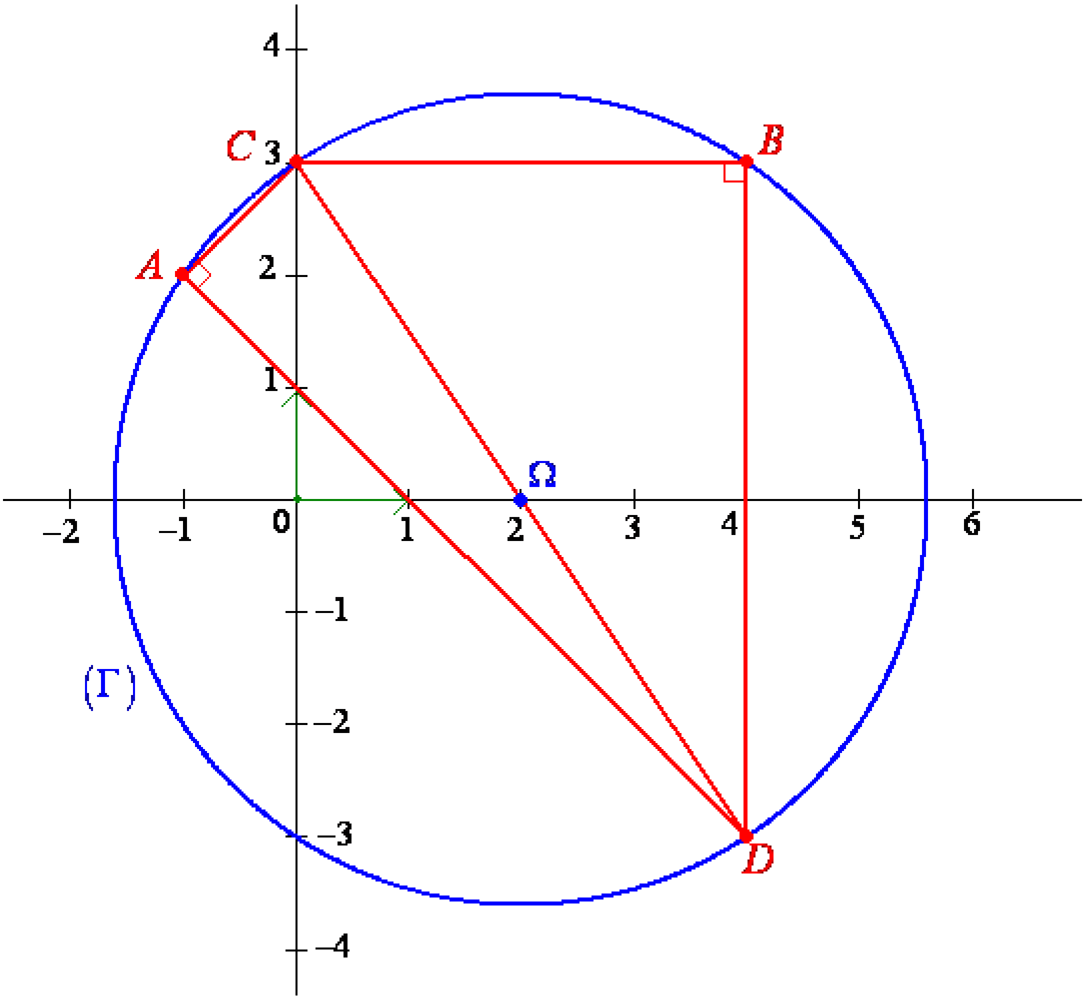
ومنه نستنتج أن : $a=-8$ و $b=25$ .

**طريقة 2 :** تكون حدوديتان مختصرتان متساويتين إذا وفقط إذا كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

$$P(z)=(z-3i)(z^2+az+b) \Leftrightarrow P(z)=z^3+az^2+bz-3iz^2-3aiz-3bi$$
$$\Leftrightarrow P(z)=z^3+(a-3i)z^2+(b-3ai)z-3bi$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3i=-8-3i \\ b-3ai=25+24i \\ -3bi=-75i \end{cases}$$
$$P(z)=(z-3i)(z^2+az+b) \Leftrightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=25 \end{cases}$$

4. في المستوى العقدي $\mathscr{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ التي ألحاقها على التوالي هي: $z_A=-1+2i$ و $z_B=4+3i$ و $z_C=3i$ و $z_D=4-3i$ .

أ- تمثيل النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ في المستوى العقدي $\mathscr{P}$ :




ب- لدينا :
$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{3i - (-1+2i)}{4-3i-(-1+2i)} = \frac{1+i}{5-5i} = \frac{i(1-i)}{5(1-i)} = \boxed{\frac{1}{5}i}$$
$$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{3i - (4+3i)}{4-3i-(4+3i)} = \frac{-4}{-6i} = \frac{2}{3i} = \frac{2i}{3i^2} = \boxed{-\frac{2}{3}i}$$

جـ- لدينا : $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{1}{5}i = \left[\frac{1}{5}, \frac{\pi}{2}\right]$ . إذن : $\left(\overline{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \boxed{\frac{\pi}{2}} \; [2\pi]$ . ومنه فإن المثلث $ACD$ قائم الزاوية في $A$.

ولدينا : $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = -\frac{2}{3}i = \left[\frac{2}{3}, -\frac{\pi}{2}\right]$ . إذن : $\left(\overline{\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv \boxed{-\frac{\pi}{2}} \; [2\pi]$ . ومنه فإن المثلث $BCD$ قائم الزاوية في النقطة $B$.

د- بما أن $ACD$ مثلث قائم الزاوية في $A$ ، فإنه محاط بالدائرة $(\Gamma)$ التي أحد أقطارها $[CD]$ ، وبما أن $BCD$ مثلث قائم الزاوية في $B$ ، فإنه محاط بالدائرة التي أحد أقطارها $[CD]$ ، أي بالدائرة $(\Gamma)$ . وبالتالي فإن النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ تنتمي إلى الدائرة $(\Gamma)$ ، و

لدينا : مركز الدائرة $(\Gamma)$ هو النقطة $\Omega$ منتصف القطعة $[CD]$ والتي لحقها: $z_\Omega = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{3i + 4 - 3i}{2} = \boxed{2}$ .

شعاع الدائرة $(\Gamma)$ هو $R = \Omega A = |z_A - z_\Omega| = |-1+2i-2| = |-3+2i| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \boxed{\sqrt{13}}$ .

5. لدينا :
$$t_{\overrightarrow{AD}}(C) = E \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$$
$$\iff z_D - z_A = z_E - z_C$$

إذن : $z_E = z_D - z_A + z_C = 4 - 3i - (-1+2i) + 3i = \boxed{5-2i}$ .

## التمرين الثالث :

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\ln\left(1-x^3\right) & ; \quad x<0 \\ f(x)=4x\sqrt{x}-3x^2 & ; \quad x\geq 0 \end{cases}$$

وليكن $\left(\mathscr{C}_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوى $(\mathscr{P})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ .

1. أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 4x\sqrt{x}-3x^2=f(0)$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln\left(1-x^3\right)=\ln 1=0=f(0)$

إذن : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ . ومنه فإن $f$ دالة متصلة في النقطة 0 .

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4x\sqrt{x}-3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} 4\sqrt{x}-3x=0$ .

إذن $f$ قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 و $\boxed{f'_d(0)=0}$ .

نضع $t=(-x)^3$ . إذن $t\underset{x\mapsto 0^-}{\longrightarrow}0^+$ . ومنه فإن :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln\left(1-x^3\right)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln\left(1+(-x)^3\right)}{(-x)^3}\times\left(-x^2\right)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)}{t}\times\left(-\sqrt[3]{t^2}\right)=0$$

إذن $f$ قابلة للإشتقاق على اليسار في 0 و $\boxed{f'_g(0)=0}$ .

وبما أن $f'_g(0)=f'_d(0)=0$ ، فإن $f$ قابلة للإشتقاق في النقطة 0 ولدينا : $\boxed{f'(0)=0}$ .

2. ليكن $x\in\left]-\infty,0\right[$ . لدينا : $f'(x)=\left(\ln\left(1-x^3\right)\right)'=\dfrac{\left(1-x^3\right)'}{1-x^3}=\boxed{\dfrac{-3x^2}{1-x^3}}<0$ ، لأن : $-3x^2<0$ و $1-x^3>0$ .

إذن $f$ دالة تناقصية على المجال $\left]-\infty,0\right[$ .

ليكن $x\in\left]0,+\infty\right[$ . لدينا : $f'(x)=\left(4x\sqrt{x}-3x^2\right)'=4\left(x'\sqrt{x}+x\left(\sqrt{x}\right)'\right)-6x=4\left(\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)-6x$

$$f'(x)=4\left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)-6x=\sqrt{x}-6x=6\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)=\boxed{\frac{6\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}(1-x)}$$

ومنه فإن إشارة $f'(x)$ على المجال $\left]0,+\infty\right[$ هي إشارة $1-x$ ، ولدينا :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

إذن $f$ دالة تناقصية على المجال $\left[1,+\infty\right[$ ، و تزايدية على المجال $[0,1]$ .

3. أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 4x\sqrt{x}-3x^2=\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left(4-3\sqrt{x}\right)=(+\infty)\times(-\infty)=\boxed{-\infty}$ .

نضع $t=1-x^3$ . إذن $t\underset{x\mapsto-\infty}{\longrightarrow}+\infty$ ، ومنه فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln\left(1-x^3\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=\boxed{+\infty}$ .

ب- ليكن $x\in\left]-\infty,0\right[$ . لدينا :

$$3\frac{\ln(-x)}{x}+\frac{\ln\left(1-x^{-3}\right)}{x}=\frac{\ln\left((-x)^3\right)+\ln\left(1-x^{-3}\right)}{x}=\frac{\ln\left(-x^3\right)+\ln\left(1-x^{-3}\right)}{x}$$

$$=\frac{\ln\left(-x^3\left(1-x^{-3}\right)\right)}{x}=\frac{\ln\left(1-x^3\right)}{x}=\frac{f(x)}{x}$$

جـ- نعلم أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ .

ولدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x\sqrt{x}-3x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(4-3\sqrt{x}\right) = \boxed{-\infty}$ .

إذن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا، بجوار $+\infty$ ، اتجاهه محور الأراتيب.

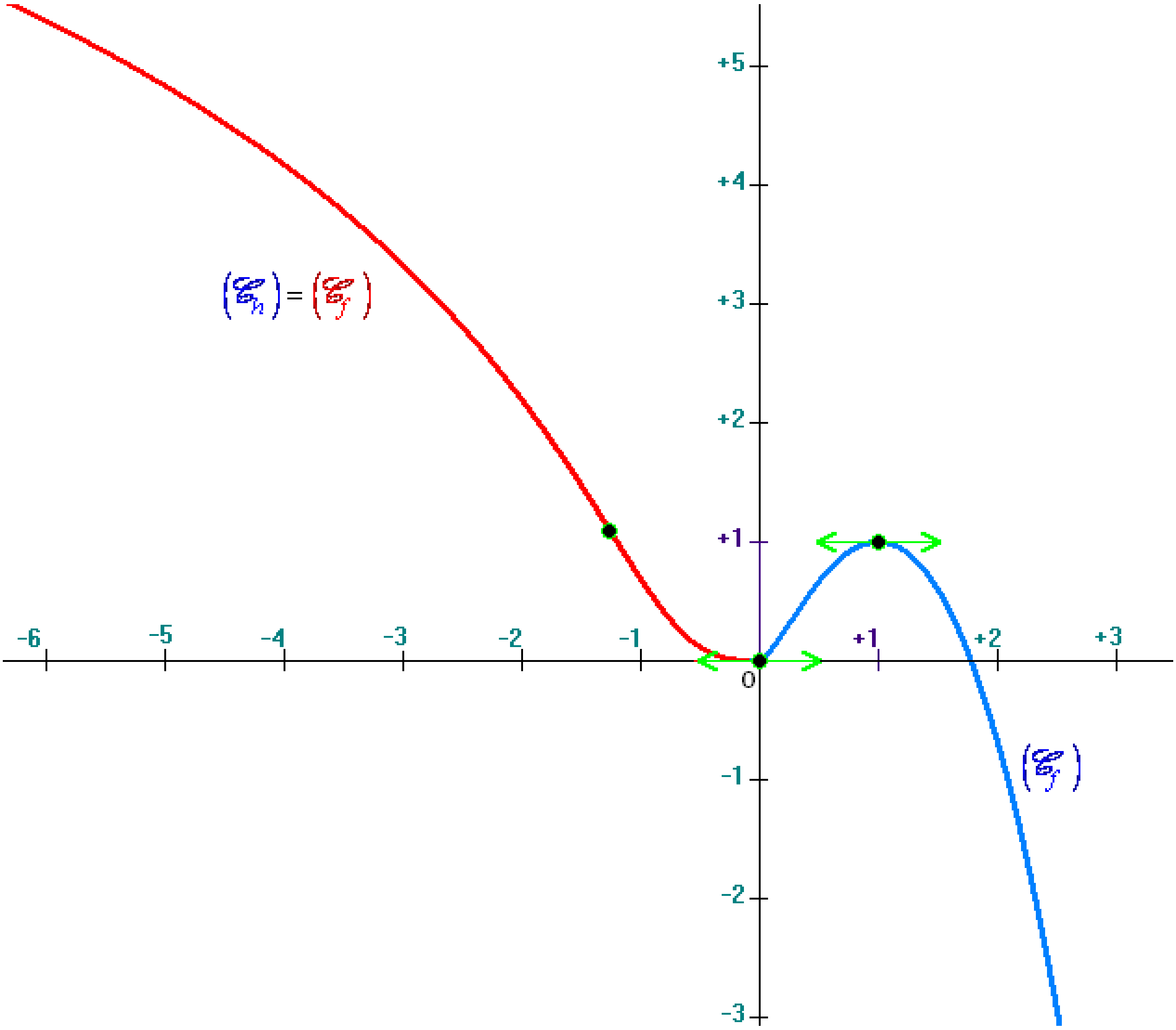
ونعلم أن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ .

نضع $t = -x$ . إذن $t \underset{x\mapsto-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ .

ومنه فإن : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 3\frac{\ln(-x)}{x} + \frac{\ln\left(1-x^{-3}\right)}{x} = \lim_{t\to+\infty} -3\frac{\ln t}{t} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{t^3}\right)}{t} = \boxed{0}$ .

إذن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا، بجوار $-\infty$ ، اتجاهه محور الأفاصيل.

4. إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ :




5. أ- لدينا $h$ دالة متصلة وتناقصية قطعا على المجال $]-\infty,0[$ . إذن $h$ تقبل دالة عكسية $h^{-1}$ معرفة من المجال $J = h\left(]-\infty,0[\right) = \left]\lim_{x\to0^+} h(x), \lim_{x\to-\infty} h(x)\right[ = ]0,+\infty[$ نحو المجال $I = ]-\infty,0[$ .

ب- لدينا :

$$\begin{array}{rccc} h^{-1} : & ]0,+\infty[ & \to & ]-\infty,0[ \\ & x & \mapsto & y = h^{-1}(x) \end{array}$$

ليكن $x\in]0,+\infty[$ و $y\in]-\infty,0[$ بحيث : $y=h^{-1}(x)$ ينبغي تحديده بدلالة $x$ ؟

$$\begin{aligned}
y=h^{-1}(x) &\Leftrightarrow h(y)=x\\
&\Leftrightarrow \ln\left(1-y^3\right)=x\\
&\Leftrightarrow 1-y^3=e^x\\
&\Leftrightarrow -y^3=e^x-1\\
&\Leftrightarrow (-y)^3=e^x-1\\
&\Leftrightarrow (-y)^3=e^x-1\\
&\Leftrightarrow -y=\sqrt[3]{e^x-1}\quad,\quad (!)\quad y<0\\
y=h^{-1}(x) &\Leftrightarrow y=-\sqrt[3]{e^x-1}
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن : $\boxed{h^{-1}(x)=-\sqrt[3]{e^x-1}}\quad : \quad \forall x\in]0,+\infty[$

6. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{4}{9} \\ u_{n+1}4u_n\sqrt{u_n}-3u_n^2=f(u_n)\quad ;\quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

أ- من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=\frac{4}{9}$ ، إذن : $\frac{4}{9}\le u_0\le 1$ .

ليكن $n\in\mathbb{N}$ . – نفترض أن : $\frac{4}{9}\le u_n\le 1$ .

– نبين أن : $\frac{4}{9}\le u_{n+1}\le 1$ .

لدينا : $f$ تزايدية على المجال $\left[\frac{4}{9},1\right]$ .

إذن : $\frac{4}{9}\le u_n\le 1\Rightarrow f\left(\frac{4}{9}\right)\le f(u_n)\le f(1)\Rightarrow \frac{48}{81}\le u_{n+1}\le 1\Rightarrow \frac{4}{9}\le u_{n+1}\le 1$

لأن : $\frac{4}{9}\le\frac{48}{81}$ .

وبالتالي فإن : $\boxed{\frac{4}{9}\le u_n\le 1}\quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$ .

ب- ليكن $n\in\mathbb{N}$ . لدينا :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n&=4u_n\sqrt{u_n}-3u_n^2-u_n=u_n\left(4\sqrt{u_n}-3u_n-1\right)\\
&=u_n\left[3\sqrt{u_n}-3u_n+\sqrt{u_n}-1\right]=u_n\left[3\sqrt{u_n}\left(1-\sqrt{u_n}\right)-\left(1-\sqrt{u_n}\right)\right]\\
u_{n+1}-u_n&=u_n\left(1-\sqrt{u_n}\right)\left(3\sqrt{u_n}-1\right)
\end{aligned}$$

وبما أن $\frac{4}{9}\le u_n\le 1$ ، فإن : $u_n\ge 0$ و $u_n\le 1\Rightarrow\sqrt{u_n}\le 1\Rightarrow 1-\sqrt{u_n}\ge 0$

و : $\frac{2}{3}\le\sqrt{u_n}\le 1\Rightarrow 2\le 3\sqrt{u_n}\le 3\Rightarrow 1\le 3\sqrt{u_n}-1\le 2$

إذن : $u_{n+1}-u_n\ge 0\quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$ . ومنه فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية.

R

## طريقة 2 : البرهان بالترجع .

✓ من أجل $n=0$ ، لدينا : $u_0=\frac{4}{9}$ و $u_1=f(u_0)=f\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{48}{81}$ . إذن : $u_1\geq u_0$ .

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$ . – نفترض أن : $u_{n+1}\geq u_n$ .

– ونبين أن : $u_{n+2}\geq u_{n+1}$.

نعلم أن $f$ تزايدية على المجال $\left[\frac{4}{9},1\right]$ وأن $\frac{4}{9}\leq u_n\leq 1\ :\ \forall n\in\mathbb{N}$.

إذن :
$$\begin{aligned} u_{n+1}\geq u_n &\Rightarrow f(u_{n+1})\geq f(u_n)\\ &\Rightarrow u_{n+2}\geq u_{n+1}\end{aligned}$$

✓ وبالتالي فإن : $u_{n+1}\geq u_n\ :\ \forall n\in\mathbb{N}$.

وعليه فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية.

جـ- بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 1 ، فإنها متقاربة ، وبما أن :

✓ $f$ متصلة على المجال $\left[\frac{4}{9},1\right]$ .

✓ $f$ متصلة وتزايدية قطعا على المجال $\left[\frac{4}{9},1\right]$ . إذن : $f\left(\left[\frac{4}{9},1\right]\right)=\left[f\left(\frac{4}{9}\right),f(1)\right]=\left[\frac{48}{81},1\right]\subset\left[\frac{4}{9},1\right]$ .

✓ $u_0=\frac{4}{9}\in\left[\frac{4}{9},1\right]$ .

✓ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها $l$.

فإن : $l=f(l)$ و $l\in\left[\frac{4}{9},1\right]$ .

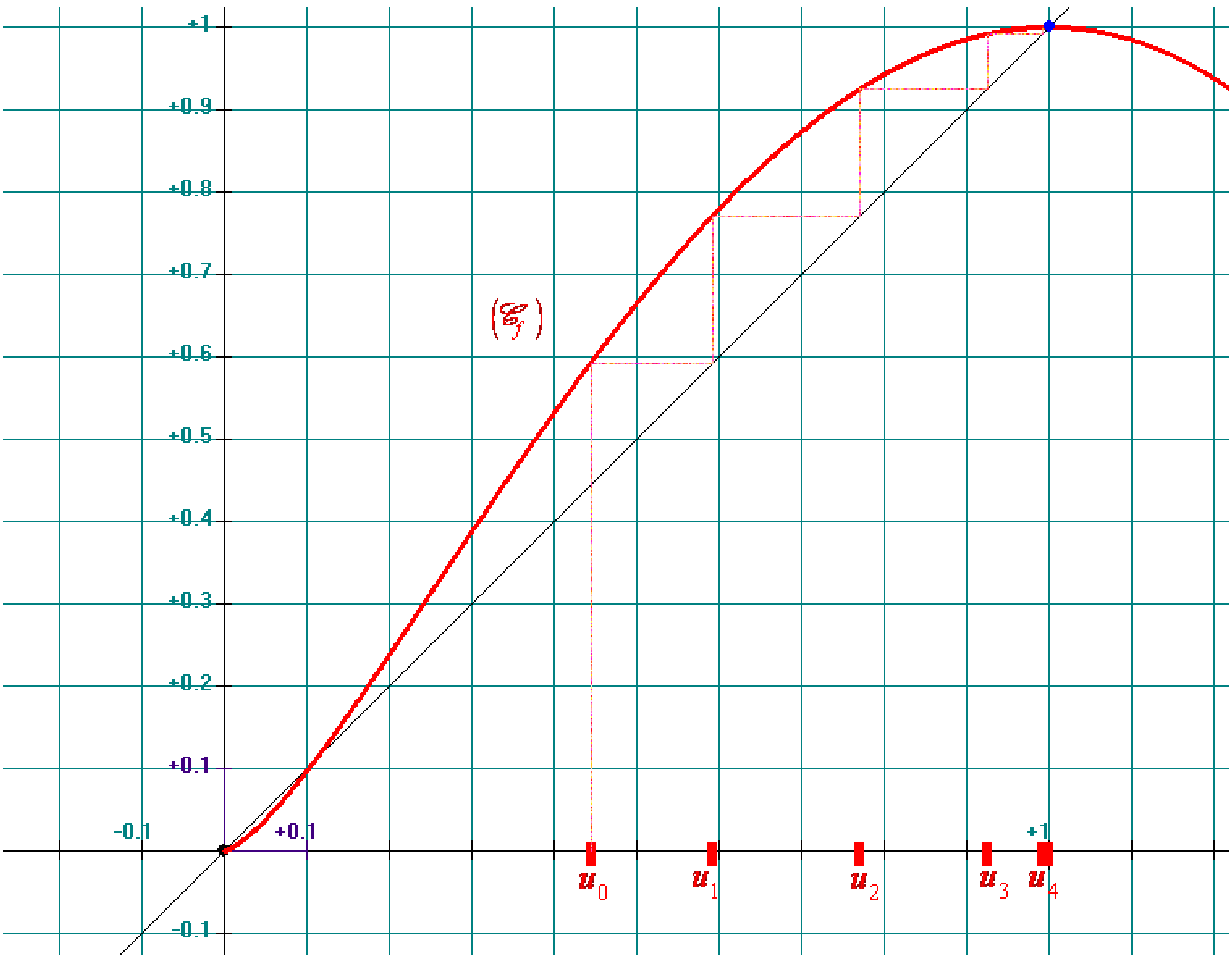
$$\begin{aligned} f(l)=l &\Leftrightarrow 4l\sqrt{l}-3l^2-l=0\\ &\Leftrightarrow l\left(\sqrt{l}-1\right)\left(3\sqrt{l}-1\right)=0\end{aligned}$$

$$f(l)=l \Leftrightarrow l=0 \text{ أو } l=1 \text{ أو } l=\frac{1}{9}$$

وبما أن : $l\in\left[\frac{4}{9},1\right]$ ، فإن : $l=1$ . وبالتالي فإن : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=1}$.

**تمثيل حدود المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ على محور الأفاصيل :** باستعمال البرنام **Archimède II plus**

**حساب الحدود الثمانية الأولى للمتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى $10^{-39}$ :** باستعمال البرنام **Maple 8**




```
> f:=x->4*x*sqrt(x)-3*x^2;
```

$$f := x \to 4\,x\,\sqrt{x} - 3\,x^2$$

```
> u||0:=4/9;
```

$$u0 := \frac{4}{9}$$

```
> for n from 0 to 7 do u||(n+1):=evalf ( f(u||n),40) end do;
>
```

$$u1 := .5925925925925925925925925925925925925926$$

$$u2 := .7712140194964303997655401787057750003857$$

$$u3 := .9247701451602197326158548026141754153 92$$

$$u4 := .9916202658372601288144754474477286897 92$$

$$u5 := .9998948176533726249213081014285133390 64$$

$$u6 := .9999999834053018650620684499257125957 82$$

$$u7 := .9999999999999999586923991857909924819865$$

$$u8 := .9999999999999999999999999999999744052317$$

ثانوية بئر أنزران ـ صفرو ـ
الثّانية بكالوريا علوم فيزيائية 2
2007 - 2008

# امتحان تجريبي موحّد
# ماي 2008
(1 / 2)

الشعبة: علوم تجريبية
المدّة: 3 ساعات
ذ: توفيق بنعمرو

---

**يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة**

## التمرين 1

المستوى العقدي منسوب لمعلم متعام ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

**1) أ)** حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2z+2=0$ . — 0.75

**ب)** أكتب الحلّين على الشّكل المثلثي. — 0.5

**2)** نعتبر النّقط $A$ و $B$ و $C$ التي ألحاقها على التّوالي: $z_A=1+i$ و $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=2z_B$ .

**أ)** حدّد الشّكل الجبري و المثلثي ل $\dfrac{z_c-3}{z_A-3}$ . — 0.5

**ب)** لتكن النّقطة $I(3)$، استنتج طبيعة المثلث $IAC$ حيث. — 0.25

**3)** لتكن النّقطة $E$ صورة $O$ بالإزاحة $2\overrightarrow{IC}$، تحقّق أنّ: $z_E=-2-4i$ . — 0.5

**4)** حدّد لحق النّقطة $D$ صورة $E$ بالدوران $R(O,\dfrac{\pi}{2})$ . — 0.5

## مـسألـة

<u>الجزء الأوّل:</u> نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=1-\ln(1+e^{-x})$ .

**1) أ)** بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ و أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة. — 0.5

**ب)** بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ . — 0.25

**2) أ)** تحقّق أنّ $\forall x\in\mathbb{R}:\ f(x)=x+1-\ln(1+e^{x})$ و استنتج أنّ المستقيم $(D):y=x+1$ مقارب مائل بجوار $-\infty$ . — 0.75

**ب)** حدّد الوضع النّسبي ل $(D)$ و $C_f$ . — 0.5

**3)** بيّن أنّ: $\forall x\in\mathbb{R}:\ f^{/}(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$ و ضع جدول التغيّرات. — 1

**4)** نضع $a=-\ln(e-1)$ أحسب: $f(a)$ و $f(-a)$ و أعط تأويلاً هندسياً لهما. — 0.75

**5)** أنشئ $C_f$ في معلم م م م، الوحدة $2cm$ و $a\approx-0,6$ و $f(0)\approx0,3$ . — 1.25

**6)** بيّن أنّ $f$ تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ معرّفة على مجال $J$ يتمّ تحديده و أنشئ في نفس المعلم المنحنى $C_{f^{-1}}$ . — 0.5

<u>الجزء الثّاني:</u> نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بما يلي: $u_0=\dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ .

**1)** بيّن بالترجّع أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}:\ 0\le u_n\le -a$ — 1

**2)** أ) بيّن أنّ $\forall x\in\mathbb{R}:\ f(x)\ge x \iff x\le -a$ — 0.5

**ب)** بيّن أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية. — 0.75

**3)** استنتج أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدّد نهايتها. — 1

بالتوفيق

**التمرين 2**

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر المستويين $(P): x+z+1=0$ و $(R): x+y-z-2=0$

0.5 **1)** أ) بيّن أنّ المستويين $(P)$ و $(R)$ متعامدان.

0.75 **ب)** تحقّق أنّ $\vec{n}(-1,2,1)$ موجّهة للمستقيم $(\Delta)$ تقاطُع $(P)$ و $(R)$ و حدّد تمثيل بارمتري له.

0.5 **2) أ)** نعتبر الفلكة $(S)$ التي مركزها $O$ و المماسّة للمستقيم $(\Delta)$ بيّن أنّ شعاعاها هو $\sqrt{\frac{11}{6}}$.

0.25 **ب)** حدّد معادلة ديكارتية ل $(S)$.

1 **ج)** بيّن أنّ المستوى $(P)$ يقطع $(S)$ وفق دائرة محدّداً مركزها و شعاعها.

**التمرين 3**

نعتبر المعادلة التفاضلية $(E):\ y''-4y'+13y=0$

0.5 **1)** حلّ المعادلة التفاضلية $(E)$.

0.5 **2) أ)** حدّد الحلّ $g$ للمعادلة $(E)$ الذي يحقّق $g(0)=0$ و $g'(0)=3$.

0.75 **ب)** استنتج أنّ: $\int_0^{\pi} e^{2x}\sin(3x)\,dx=\frac{3}{13}(1+e^{2\pi})$.

1 **ج)** أحسب باستعمال مكاملة بالأجزاء التكامل: $I=\int_0^{\pi} e^{2x}\cos(3x)\,dx$.

**التمرين 4**

السؤالان 1) و 2) مستقلّان فيما بينهما

**1)** نعتبر نرداً مكعّباً أوجهه مرقّمة من 1 إلى 6. نرمي هذا النّرد مرّة واحدة و نسجّل الرّقم المحصّل عليه.

نعتبر الحدثين: $A$ " الرقم المحصّل عليه أصغر أو يساوي 4 " و $B$ " الرقم المحصّل عليه فردي ".

0.75 **أ)** أحسب: $p(A)$ و $p_B(A)$.

0.5 **ب)** نرمي هذا النّرد 5 مرّات، أحسب احتمال الحصول على عدد فردي مرّتين بالضّبط.

**2)** $U$ صندوق يحتوي على كرتين خضراوين و ثلاث كرات صفراء.

$U'$ صندوق يحتوي على ثلاث كرات خضراء و كرة واحدة بيضاء.

نسحب تآنياً و عشوائياً كرتين من $U$ و نسحب عشوائياً بالتتابع و دون إحلال كرتين من $U'$؛ فنحصل على أربع كرات.

1.25 ليكن $X$ المتغيّر العشوائي المرتبط بعدد الألوان المحصّل عليها. حدّد قانون احتمال المتغيّر العشوائي $X$.

بالتوفيق

ثانوية بئر أنزران ـ صفرو ـ

الثّانية بكالوريا علوم فيزيائية 2

2007 - 2008

# إشـارات حـلـول
## الامـتـحـان الـتـجـريـبـي مـاي 2008

(1 / 4)

الشعبة: علوم تجريبية

المدّة: 3 ساعات

ذ: توفيق بنعمرو

## التمرين الأوّل:

**1) أ)** المميّز: $\Delta = -4$ إذن $d = 2i$ جذر مربّع له و منه الحلاّن هما:
$z_1 = \dfrac{2-2i}{2} = 1-i$ و $z_2 = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$ .

**ب)** $z_1 = 1-i = [\sqrt{2}\,,\, -\dfrac{\pi}{4}]$ و $z_2 = [\sqrt{2}\,,\, \dfrac{\pi}{4}]$ .

**2) أ)** $\dfrac{z_C-3}{z_A-3} = \dfrac{-1-2i}{-2+i} = \dfrac{(-1-2i)(-2-i)}{5} = \dfrac{5i}{5} = i = [1, \dfrac{\pi}{2}]$

**ب)** لدينا $\left|\dfrac{z_C-3}{z_A-3}\right| = 1$ إذن $|z_C-3| = |z_A-3|$ و منه $CI = AI$

لدينا $(\overrightarrow{IA}\,,\,\overrightarrow{IC}) \equiv \arg(\dfrac{z_C-3}{z_A-3}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

إذن $IAC$ متساوي الساقين و قائم الزّاوية في $I$ .

**3)**
$$t_{2\overrightarrow{IC}}(O) = E \iff 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{OE}$$
$$\iff (z_E - z_O) = 2(z_C - z_I)$$
$$\iff z_E = 2(2-2i-3) = -2-4i$$
.

**4)**
$$R_{(o,\frac{\pi}{2})}(E) = D \iff z_D - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_E - z_O)$$
$$\iff z_D = i(-2-4i)$$
$$\iff z_D - z_O = 4-2i$$
.

## مـسـألـة:

### الجزء الأوّل:

**1) أ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1-\ln(1+0) = 1$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$ .

**ب)** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^{-x}) = +\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\ln(1+e^{-x}) = -\infty$ .

**2) أ)**
$$f(x) = 1-\ln(1+e^{-x}) = 1-\ln(\,e^{-x}(e^x+1)\,)$$
$$= 1-\ln(e^{-x}) - \ln(e^x+1)$$
$$= 1-(-x) - \ln(e^x+1) = 1+x-\ln(e^x+1)$$

لدينا: $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0$ إذن:

بـالـتـوفـيـق

$$\lim_{-\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{-\infty} -\ln(e^x+1) = -\ln(1) = 0$$

**ب)** حسب ما سبق: $f(x) - y = f(x) - (x+1) = -\ln(e^x+1)$
$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0 \iff e^x+1 > 1 \iff \ln(e^x+1) > \ln(1)$$
$$\iff \ln(e^x+1) > 0 \iff -\ln(e^x+1) < 0$$
$$\iff f(x) - y < 0$$
إذن $C_f$ يوجد تحت $(\Delta)$ على $\mathbb{R}$ .

**3)** $f'(x) = 0 - \dfrac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} = \dfrac{1}{e^x+1}$

لدينا $\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$ إذن $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0$ .

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ $\nearrow$ $1$ |

**4)**
$$f(a) = 1-\ln(1+e^{-a}) = 1-\ln(1+e^{\ln(e-1)})$$
$$= 1-\ln(1+e-1) = 1-\ln(e) = 1-1 = 0$$
إذن $C_f$ يقطع محور الأفاصيل في النّقطة $A(a,0)$ .
$$f(-a) = 1-\ln(1+e^{a}) = 1-\ln(1+e^{-\ln(e-1)})$$
$$= 1-\ln(1+\frac{1}{e-1}) = 1-\ln(\frac{e-1+1}{e-1})$$
$$= 1-\ln(\frac{e}{e-1}) = 1-\ln(e)+\ln(e-1) = \ln(e-1) = -a$$
إذن $C_f$ يقطع المستقيم $y=x$ في النّقطة $B(-a,-a)$ .

**6)** $f$ متّصلة و تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ إذن تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ على: $J=f(\mathbb{R})=]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\,,\,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\,[=]-\infty\,,1[$ .

## الجزء الثاني:

**1)** من أجل $n=0$ : $0\le u_0=\frac{1}{2}\le 0,6\approx -a$ .

نفترض أنّ $0\le u_n\le -a$ ، لدينا $f$ تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ إذن $f(0)\le f(u_n)\le f(-a)$ و حسب السؤال 4) فإن $f(-a)=-a$

إذن $0\le u_{n+1}\le -a$ و منه $\forall n\in\mathbb{N}: 0\le u_n\le -a$ .

**2) أ)**

$$f(x)\ge x \Leftrightarrow x+1-\ln(1+e^x)\ge x$$
$$\Leftrightarrow 1\ge \ln(1+e^x) \Leftrightarrow e\ge 1+e^x$$
$$\Leftrightarrow e^x\le e-1 \Leftrightarrow x\le \ln(e-1) \Leftrightarrow x\le -a$$

**ب)** نستعمل التكافؤات المتوالية:

$(u_n)_n$ تزايدية $\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}\ge u_n \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: f(u_n)\ge u_n$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: u_n\le -a$ حسب السؤال السّابق

و هذا صحيح حسب السؤال 1).

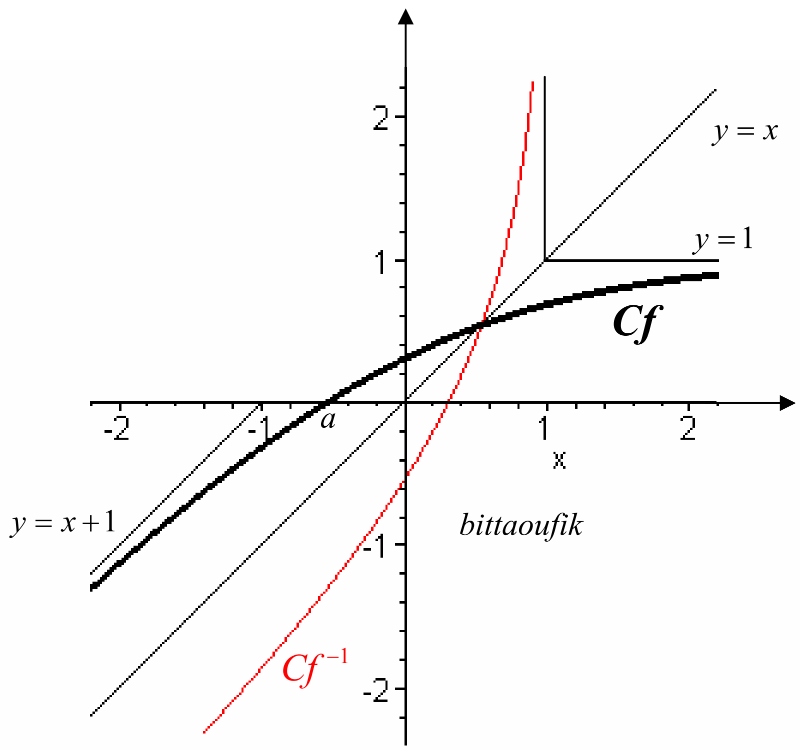
**3)** $(u_n)_n$ تزايدية و مكبورة ب $(-a)$ إذن متقاربة.

$f$ متصلة على $[0,-a]$ و $f([0,-a])\subset[0,-a]$ و $(u_n)_n$ متقاربة و $\forall n: u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_0\in[0,-a]$

إذن $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ يحقّق المعادلة $f(\ell)=\ell$ .

$$f(\ell)=\ell \Leftrightarrow \ell+1-\ln(1+e^\ell)=\ell$$
$$\Leftrightarrow 1=\ln(1+e^\ell) \Leftrightarrow e=1+e^\ell \Leftrightarrow \ell=\ln(e-1)=-a$$

**بالتوفيق**




## التمرين الثاني:

**1) أ)** لدينا من المعادلتين:

$\overrightarrow{n_1}(1,0,1)$ منظمية على $(P)$ و $\overrightarrow{n_2}(1,1,-1)$ منظمية على $(R)$

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=1+0-1=0$ إذن $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ و بالتالي: $(P)\perp(R)$ .

**ب)** $\vec{n}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}\left(\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\right)$

إذن $\vec{n}(-1,2,1)$ موجّهة ل $(\Delta)$ .

نحدّد نقطة مشتركة بين $(P)$ و $(R)$:

نأخذ $z=0$ إذن في معادلة $(P)$: $x=-1$ نعوّضهما في معادلة $(R)$:

إذن $y=2+z-x=3$ و منه $A(-1,3,0)$ مشتركة بين $(P)$ و $(R)$ إذن تنتمي ل $(\Delta)$

و بالتالي تمثيل بارمتري: $(\Delta):\begin{cases} x=-1-t \\ y=3+2t \quad ; \; t\in\mathbb{R} \\ z=0+t \end{cases}$

**2) أ)** شعاع الفلكة هو مسافة المركز $O$ عن المستقيم $(\Delta)$:

$$R=d(\,O\,,(\Delta)\,)=\frac{\|\overrightarrow{OA}\wedge\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$$

نحدّد $\overrightarrow{OA}\wedge\vec{n}$ فنجد $\overrightarrow{OA}\wedge\vec{n}\,(3,1,1)$ إذن $R=\sqrt{\frac{11}{6}}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}$.

**ب)** $x^2+y^2+z^2=\frac{11}{6}$.

بالتوفيق

**ج)** نحدّد مسافة $O$ عن المستوى $(P)$:

$$d=d(O\,,(P))=\frac{|0+0+1|}{\sqrt{1+0+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<R$$

شعاع الدائرة هو: $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

نحدّد المركز: ليكن $(D)$ المستقيم المار من $O$ و العمودي على $(P)$

إذن $\overrightarrow{n_1}$ موجّهة له و منه تمثيله البارمتري: $(D):\begin{cases} x=t \\ y=0 \quad ; \; t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

نعوّضه في معادلة $(P)$ فنجد $t=-\frac{1}{2}$ إذن نقطة التّقاطع:

$c(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2})$ هي مركز الدائرة.

## التمرين الثالث:

**1)** المعادلة المميّزة: $r^2-4r+13=0$ المميّز: $\Delta=-36$

$d=-6i$ جذر مربّع: الحلاّن: $r=2\pm 3i$

حلول المعادلة التفاضلية تكتب على شكل:

$y(x)=e^{2x}(\;\lambda\cos(3x)+\mu\sin(3x)\;)$.

**2) أ)** $g(x)=e^{2x}(\;\lambda\cos(3x)+\mu\sin(3x)\;)$

$g(0)=0$ إذن $\lambda\cos 0+\mu\sin 0=0$ و منه $\lambda=0$.

إذن $g(x)=e^{2x}\mu\sin(2x)$.

لدينا: $g'(x)=2e^{2x}\mu\sin(3x)+\mu e^{2x}3\cos(3x)$

$g'(0)=3$ إذن $\mu=1$ و بالتالي: $g(x)=e^{2x}\sin(3x)$.

**ب)** لدينا $g''(x)-4g'(x)+13g(x)=0$

إذن $g(x)=\frac{4}{13}g'(x)-\frac{1}{13}g''(x)$ و منه:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{2x}\sin(3x)\,dx&=\int_0^\pi g(x)\,dx\\&=\frac{4}{13}\int_0^\pi g'(x)\,dx-\frac{1}{13}\int_0^\pi g''(x)\,dx\\&=\frac{4}{13}[g(x)]_0^\pi-\frac{1}{13}[g'(x)]_0^\pi\\&=\frac{4}{13}[g(\pi)-g(0)]-\frac{1}{13}[g'(\pi)-g'(0)]\\&=0-\frac{1}{13}[-3e^{2\pi}-3]=\frac{3}{13}[e^{2\pi}+1]\end{aligned}$$

**ج)** مكاملة بالأجزاء:

نضع $u(x)=\cos(3x)$ و $v'(x)=e^{2x}$ إذن:

$u'(x)=-3\sin(3x)$ و $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$. و منه:

$$\begin{aligned}I&=\int_0^\pi e^{2x}\cos(3x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\Big[e^{2x}\cos(3x)\Big]_0^\pi-\int_0^\pi-\frac{3}{2}e^{2x}\sin(3x)\,dx\\&=-\frac{1}{2}e^{2\pi}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{3}{13}(e^{2\pi}+1))=-\frac{2}{13}(e^{2\pi}+1)\end{aligned}$$

## التمرين الرّابع:

**1) أ)** $A$ : << 1 - 2 - 3 - 4 >> و $B$ : << 1 - 3 - 5 >>

و $A\cap B$ : << 1 - 3 >> إذن:

$p(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ و $p(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ و $p(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

و بالتالي: $p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{2}{3}$.

ب) الاختبار يُعاد خمس مرات باستقلالية: $n=5$.

و الحدث $B$ : $p=p(B)=\frac{1}{2}$.

احتمال أن يتحقّق $B$ مرّتين $k=2$ هو:
$C_5^2\cdot(\frac{1}{2})^2\cdot(1-\frac{1}{2})^3=\frac{5}{16}$ .

**2)** عدد الألوان المسحوبة هو لون أو لونان أو ثلاث ألوان.

# بالتوفيق

$\underbrace{2V\ ;\ 3J}_{U}$ نسحب تآنياً كرتين
إذن نستعمل عدد التأليفات

$\underbrace{3V\ ;\ 1B}_{U'}$ نسحب بتتابع و دون إحلال
إذن نستعمل عدد التّرتيبات

عدد الإمكانيات: $card\Omega=A_4^2\times C_5^2=12\times10=120$ .

| | | |
|---|---|---|
| $X=1$ | $(\underbrace{2V}_{U'}$ و $\underbrace{2V}_{U})$ | $p(X=1)=\frac{A_2^3C_2^2}{120}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$ |
| $X=2$ | $(\underbrace{1B\ ,1V}_{U'}$ و $\underbrace{2V}_{U})$ أو $(\underbrace{2V}_{U'}$ و $\underbrace{2J}_{U})$ أو $(\underbrace{2V}_{U'}$ و $\underbrace{1V,1J}_{U})$ | $p(X=2)=\frac{2A_1^1A_3^1C_2^2+A_3^2C_3^2+A_3^2C_3^1C_2^1}{120}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$ |
| $X=3$ | $(\underbrace{1B\ ,1V}_{U'}$ و $\underbrace{2J}_{U})$ أو $(\underbrace{1B\ ,1V}_{U'}$ و $\underbrace{1V,1J}_{U})$ | $p(X=3)=\frac{2A_1^1A_3^1C_3^2+2A_1^1A_3^1C_3^1C_2^1}{120}=\frac{54}{120}=\frac{9}{20}$ |

R

| المادة : الرياضيات<br>المستوى: 2سلك الباكالوريا<br>الشعبة: علوم تجريبية<br>المعامل: 7<br>المدة : 3ساعات | الامتحان التجريبي<br><br>أبريل 2007 | المملكة المغربية<br>وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي<br>و تكوين الأطر و البحث العلمي<br>الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين<br>جهة الشاوية ورديغة-سطات<br>نيابة خريبكة<br>ثانوية يوسف بن تاشفين التأهيلية |
|---|---|---|

| | |
|---|---|
| **تمرين1** | **02,00** |
| الفضاء منسوب لمعلم متعامد و ممنظم ومباشر $\left(O\,;\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ . | |
| نعتبر النقط $A\,(0\,;1;\,1)$ ; $B\,(\,1;\,4;\,0)$ ; $C\,(\,1;\,0;\,1)$ | |
| 1) أ) أحسب الجداء المتجهي $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ | 0,50 |
| ب) استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) . | 0,50 |
| 2) لتكن $(S)$ مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء حيث | |
| $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+\dfrac{13}{2}=0$ | |
| أ) بين أن $(S)$ فلكة شعاعها $R=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ محددا احداثياتمركزها $\Omega$. | 0,50 |
| ب) بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة $(S)$. | 0,50 |
| **تمرين2** | **03,00** |
| نعتبر $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بـ | |
| $\begin{cases} u_0=\dfrac{3}{2} \\ u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1} \quad ;\forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$ | |
| 1- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 1\prec u_n\prec 2$ | 0,50 |
| 2- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية و استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة | 0,75 |
| 3- نعتبر $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بـ $v_n=\ln(u_n-1)\quad \forall n\in\mathbb{N}$ | |
| أ- بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=-\ln 2$ | 0,75 |
| ب- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | 1,00 |
| **تمرين3** | **04,00** |
| 1- تأكد أن $(2i-1)^2=-3-4i$ | 0,25 |
| 2- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3+2z^2+4(-1+i)z+16(1+i)=0 \quad (E)$ | |
| أ/ تأكد أن $-4$ حل للمعادلة $(E)$ | 0,25 |
| ب/ حدد العددين $b$ و $a$ حيث $z^3+2z^2+4(-1+i)z+16(1+i)=(z+4)(z^2+az+b)$ | 0,75 |
| ج/ حدد $z_1$ و $z_2$ جدري المعادلة $z^2-2z+4(1+i)=0 \quad z\in\mathbb{C}$ | 0,75 |
| د/ استنتج حلول المعادلة $(E)$ | 0,25 |
| 3- أكتب حلول المعادلة $(E)$ في شكلها المثلثي | 0,75 |
| 4- في المستوى العقدي المنسوب إلى المعلم المتعامد الممنظم $\left(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2\right)$، | |
| نعتبر النقط $A$ و $B$ و $C$ التي ألحاقها $-4$ و $2i$ و $2-2i$ على التوالي<br>بين أن $ABC$ مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في $B$. | 1,00 |

**الامتحان التجريبي: أبريل2007**

**تمرين4** 02,00

يحتوي صندوق على 7 بيادق سوداء مرقمة، أربعة بيادق منها تحمل الرقم 1 و البيادق الاخرى تحمل رقم 2 . و ثلاث بيادق بيضاء بيدقان منها تحمل الرقم 1 و البيدق الاخر يحمل الرقم 2 .

نسحب بالتتابع و بدون إحلال بيدقين

1- أحسب احتمال الحصول على بيدقين مجموع رقميهما زوجي 1

2- أحسب احتمال الحصول على بيدقين سوداوين علما أن مجموع رقميهما زوجي. 1

**تمرين5** 09,00

**A)** لتكن $g$ الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln(x+1)-\ln x-\dfrac{1}{x+1}+1$

1- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ 0,50

2- بين أن $g'(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)^2}$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ و استنتج منحى تغيرات $g$ على $]0;+\infty[$ 0,75

3- استنتج أن $g(x)\succ 0 \quad \forall x\in]0;+\infty[$ 0,50

**B)** لتكن $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+x+1 & ;x\succ 0 \\ f(x)=(1-x)e^{x} & ;x\le 0 \end{cases}$$

و $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

1- أ/ بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=1$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ . 0,75

ب/ حدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و أول النتيجة هندسيا 0,75

ج/ بين أن $f$ متصلة في 0 . 0,75

2- أدرس قابلية اشتقاق $f$ على اليمين في 0 و على اليسار في 0 ثم أول النتيجتين هندسيا. 1,25

3- أ/ بين أن $f'(x)=g(x) \quad \forall x\in]0;+\infty[$ و أن $f'(x)=-xe^{x} \quad \forall x\in]-\infty;0[$ 1,25

ب/ أعط جدول تغيرات $f$ . 0,50

4- بين أن النقطة $A$ ذات الافصول 1- نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$ 0,50

5- بين أن المستقيم ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$ . 0,50

6- أنشئ المنحنى $(C_f)$. 1,00

$\ln 2\approx 0,7 \qquad \ln 3\approx 1,1 \qquad e^{-1}\approx 0,37 \qquad e^{-2}\approx 0,14 \qquad e^{-3}\approx 0,05$

| المملكة المغربية<br>وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي<br>و تكوين الأطر و البحث العلمي<br>الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين<br>جهة الشاوية ورديغة-سطات<br>نيابة خريبكة<br>ثانوية يوسف بن تاشفين التأهيلية | الامتحان التجريبي<br><br>أبريل 2007 | المادة : الرياضيات<br>المستوى: 2سلك الباكالوريا<br>الشعبة: علوم تجريبية<br>المعامل: 7<br>المدة : 3ساعات |
|---|---|---|

## تمرين1

1) أ) نحسب $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

لدينا $A\,(0\,;\,1;\,1)$ ; $B\,(\,1;\,4;\,0)$ ; $C\,(\,1;\,0;\,1)$ و منه $\overrightarrow{AB}(1;3;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(1;\text{-}1;0)$

$$Z=-4 \leftarrow \begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} \rightarrow Y=-1$$

$$\downarrow$$

$$X=-1$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-1;-1;-4)$$

ب) نستنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-1;-1;-4)$ منظمية على المستوى (ABC) و منه $(ABC)\ :\text{-}x\text{-}y\text{-}4z+d=0$

و حيث أن $A\,(0\,;\,1;\,1)\in(ABC)$ فان $d=5$ إذن $(ABC)\ :\text{-}x\text{-}y\text{-}4z+5=0$

2) -

أ) نبين أن $(S)$ فلكة شعاعها R = $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ مع تحديد احداثياتمركزها Ω.

$$M(x;y;z)\in(S)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+\frac{13}{2}=0$$

$$M(x;y;z)\in(S)\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\frac{9}{2}$$

إذن $(S)$ فلكة شعاعها R = $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ومركزها $\Omega(1;1;3)$

ب) نبين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة $(S)$.

لدينا $(ABC)\ :\text{-}x\text{-}y\text{-}4z+5=0$ و $\Omega(1;1;3)$ مركز الفلكة $(S)$

$$d(\Omega;(ABC))=\frac{|-1-1-12+5|}{\sqrt{1+1+16}}=\frac{9}{\sqrt{18}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=R$$

إذن المستوى (ABC) مماس للفلكة $(S)$.

## تمرين2

المتتالية العددية المعرفة بـ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{3}{2} \\ u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1} \quad ;\forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1- نبين أن $1\prec u_n\prec 2$ $\forall n\in\mathbb{N}$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=\frac{3}{2}$ ومنه $1\prec u_0\prec 2$

نفترض أن $1\prec u_n\prec 2$ عبارة صحيحة حتى الرتبة $n$ نبين أن $1\prec u_{n+1}\prec 2$

لدينا $1\prec u_n\prec 2$ و منه $0\prec u_n-1\prec 1$

و بالتالي $0\prec\sqrt{u_n-1}\prec 1$ و منه $1\prec 1+\sqrt{u_n-1}\prec 2$ أي أن $1\prec u_{n+1}\prec 2$

إذن $1\prec u_n\prec 2$ $\forall n\in\mathbb{N}$

R

2- نبين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية و نستنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

ليكن $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}-u_n=1+\sqrt{u_n-1}-u_n=\sqrt{u_n-1}\left(1-\sqrt{u_n-1}\right)$$

بما أن $1\prec u_n\prec 2$ فان $0\prec 1-\sqrt{u_n-1}$

ومنه $u_{n+1}-u_n\succ 0$ إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية

و حيث أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مكبورة بالعدد 2 فان $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

3- نعتبر $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بـ $v_n=\ln(u_n-1)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

أ- نبين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=-\ln 2$

ليكن $n\in\mathbb{N}$

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-1)=\ln\left(\sqrt{u_n-1}\right)=\frac{1}{2}\ln(u_n-1)=\frac{1}{2}v_n$$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=\ln(u_0-1)=\ln\left(\frac{3}{2}-1\right)=-\ln 2$

ب- نحدد $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و نستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=-\ln 2$

و منه $v_n=(-\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty}(-\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$$

لدينا $v_n=\ln(u_n-1)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ومنه $1+e^{v_n}=u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

اذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 1+e^{v_n}=2$

**تمرين3**

1- نتأكد أن $(2i-1)^2=-3-4i$

$$(2i-1)^2=-4-4i+1=-3-4i$$

2- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)\quad z^3+2z^2+4(-1+i)z+16(1+i)=0$

أ/ نتأكد أن $-4$ حل للمعادلة $(E)$

$$(-4)^3+2(-4)^2+4(-1+i)(-4)+16(1+i)=-64+32+16-16i+16+16i=0$$

اذن $-4$ حل للمعادلة $(E)$

ب/ نحدد العددين $b$ و $a$ حيث $z^3+2z^2+4(-1+i)z+16(1+i)=(z+4)(z^2+az+b)$

$$\forall z\in\mathbb{C}\qquad (z+4)(z^2+az+b)=z^3+(4+a)z^2+(4a+b)z+4b$$

وحيث $z^3+2z^2+4(-1+i)z+16(1+i)=(z+4)(z^2+az+b)$ $\forall z\in\mathbb{C}$

و منه $4a+b=4(-1+i)$ ; $4b=16(1+i)$ ; $4+a=2$

اذن $b=4(1+i)$ ; $a=-2$

ج/ نحدد $z_1$ و $z_2$ جدري المعادلة $z^2-2z+4(1+i)=0$ $z\in\mathbb{C}$

ليكن $\Delta'$ المميز المختصر للمعادلة $\Delta'=(-1)^2-4(1+i)=-3-4i=(2i-1)^2$

و منه $z_1=1+(2i-1)=2i$ و $z_2=1-(2i-1)=2-2i$

د/ نستنتج حلول المعادلة $(E)$

لدينا $z^3+2z^2+4(-1+i)z+16(1+i)=(z+4)(z^2-2z+4(1+i))$ $\quad \forall z\in\mathbb{C}$

$$(E)\Leftrightarrow (z+4)(z^2-2z+4(1+i))=0$$

$$(E)\Leftrightarrow z=-4 \quad ou \quad z=2i \quad ou \quad z=2-2i$$

اذن حلول المعادلة $(E)$ هي $-4$ و $2i$ و $2-2i$

3- نكتب حلول المعادلة $(E)$ في شكلها المثلثي

$$-4=[4;\pi] \quad \text{و} \quad 2i=\left[2;\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{و} \quad 2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left[2\sqrt{2};\frac{-\pi}{4}\right]$$

4- المستوى العقدي المنسوب إلى المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$،

نبين أن $ABC$ مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في $B$.

لدينا $A$ و $B$ و $C$ النقط التي ألحاقها $-4$ و $2i$ و $2-2i$ على التوالي

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)\equiv \arg\frac{2-2i-2i}{-4-2i} \quad [2\pi]$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)\equiv \arg\frac{2-4i}{-4-2i} \quad [2\pi]$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)\equiv \arg\frac{i(-2i-4)}{-4-2i} \quad [2\pi]$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)\equiv \arg i \quad [2\pi]$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)\equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

اذن $\left[\widehat{ABC}\right]$ زاوية قائمة.

لدينا $BC=|2-4i|=\sqrt{20}$ $\quad$ $BA=|-4-2i|=\sqrt{20}$ و منه $BA=BC$

اذن $ABC$ مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في $B$.

**تمرين4**

الصندوق يحتوي على 7 بيادق سوداء مرقمة، أربعة بيادق منها تحمل الرقم 1 و البيادق الاخرى تحمل رقم 2 . و ثلاث بيادق بيضاء بيدقان منها تحمل الرقم 1 و البيدق الاخر يحمل الرقم 2 . نسحب بالتتابع و بدون إحلال بيدقين

1- نحسب احتمال الحصول على بيدقين مجموع رقميهما زوجي

نعتبر الحدث $A$ : "الحصول على بيدقين مجموع رقميهما زوجي"

$$P(A)=\frac{A_6^2+A_4^2}{A_{10}^2}=\frac{6\times5+4\times3}{10\times9}=\frac{7}{15}$$

3- نحسب احتمال الحصول على بيدقين سوداوين علما أن مجموع رقميهما زوجي.

نعتبر الحدث $N$: "الحصول على بيدقين سوداوين"

$$P_A(N)=\frac{P(A\cap N)}{P(A)}=\frac{\frac{A_3^2+A_4^2}{A_{10}^2}}{\frac{7}{15}}=\frac{15}{7}\times\frac{3\times2+4\times3}{10\times9}=\frac{15}{7}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{7}$$

**تمرين5**

R

**(A** $g$ الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}+1$

-1 نبين أن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}+1\right)=1$$

-2 نبين أن $g'(x)=\frac{-1}{x(x+1)^2}$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ و نستنتج منحى تغيرات $g$ على $]0;+\infty[$

ليكن $x$ من $]0;+\infty[$ $\quad g(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}+1$

و منه

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2}=\frac{x^2+x-x^2-2x-1+x}{x(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$\frac{-1}{x(x+1)^2}\prec 0 \quad \forall x\in]0;+\infty[$ أي $g'(x)\prec 0 \quad \forall x\in]0;+\infty[$

اذن $g$ تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$

-3 نستنتج أن $g(x)\succ 0 \quad \forall x\in]0;+\infty[$

لدينا $g$ تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$

اذن $g(x)\succ 0 \quad \forall x\in]0;+\infty[$

**(B** $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x+1 & ;x\succ 0\\ f(x)=(1-x)e^x & ;x\le 0\end{cases}$$

-1 أ/ نبين أن $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=1$ ثم نستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ .

نضع $x=\frac{1}{t}$ ومنه $t=\frac{1}{x}$ و بالتالي $\quad \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{t\to0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$

و منه $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x+1=+\infty$

ب/ نحدد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ونؤول النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-x)e^x=\lim_{x\to-\infty} e^x-xe^x=0$$

و منه محور الافاصيل مقارب للمنحنى $(C_f)$

ج/ نبين أن $f$ متصلة في 0 .

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x+1=\lim_{x\to0^+} x\ln(x+1)-x\ln(x)+x+1=1$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(1-x)e^x=1$$

ومنه $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^-} f(x)=f(0)$ اذن $f$ متصلة في 0 .

-2 ندرس قابلية اشتقاق $f$ على اليمين في 0 و على اليسار في 0 ثم نؤول النتيجتين هندسيا.

R

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(1-x)e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}-e^x=1-1=0$$

و منه $f$ قابلية اشتقاق على اليسار في 0 و تقبل نصف مماس أفقي على يسار في 0

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+1=+\infty$$

و منه $f$ غير قابلية الاشتقاق على اليمين في 0 و تقبل نصف مماس عمودي على يمين في 0

3- أ/ نبين أن $f'(x)=g(x)$ $\forall x\in ]0;+\infty[$ و أن $f'(x)=-xe^x$ $\forall x\in ]-\infty;0[$

ليكن $x\in ]0;+\infty[$ $\quad f(x)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x+1$

$$f'(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}+1=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}+1=g(x)$$

ليكن $x\in ]-\infty;0[$ $\quad f(x)=(1-x)e^x$

$$f'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$$

ب/ نعطي جدول تغيرات $f$ .

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | ‖ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4- نبين أن النقطة $A$ ذات الافصول -1 نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$

ليكن $x\in ]-\infty;0[$ $\quad f'(x)=-xe^x$

$$f''(x)=-e^x-xe^x=-(x+1)e^x$$

$$f''(x)\Leftrightarrow -(x+1)e^x=0\Leftrightarrow x=-1$$

| $x$ | $-\infty$ | -1 | $0$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | 0 | - |

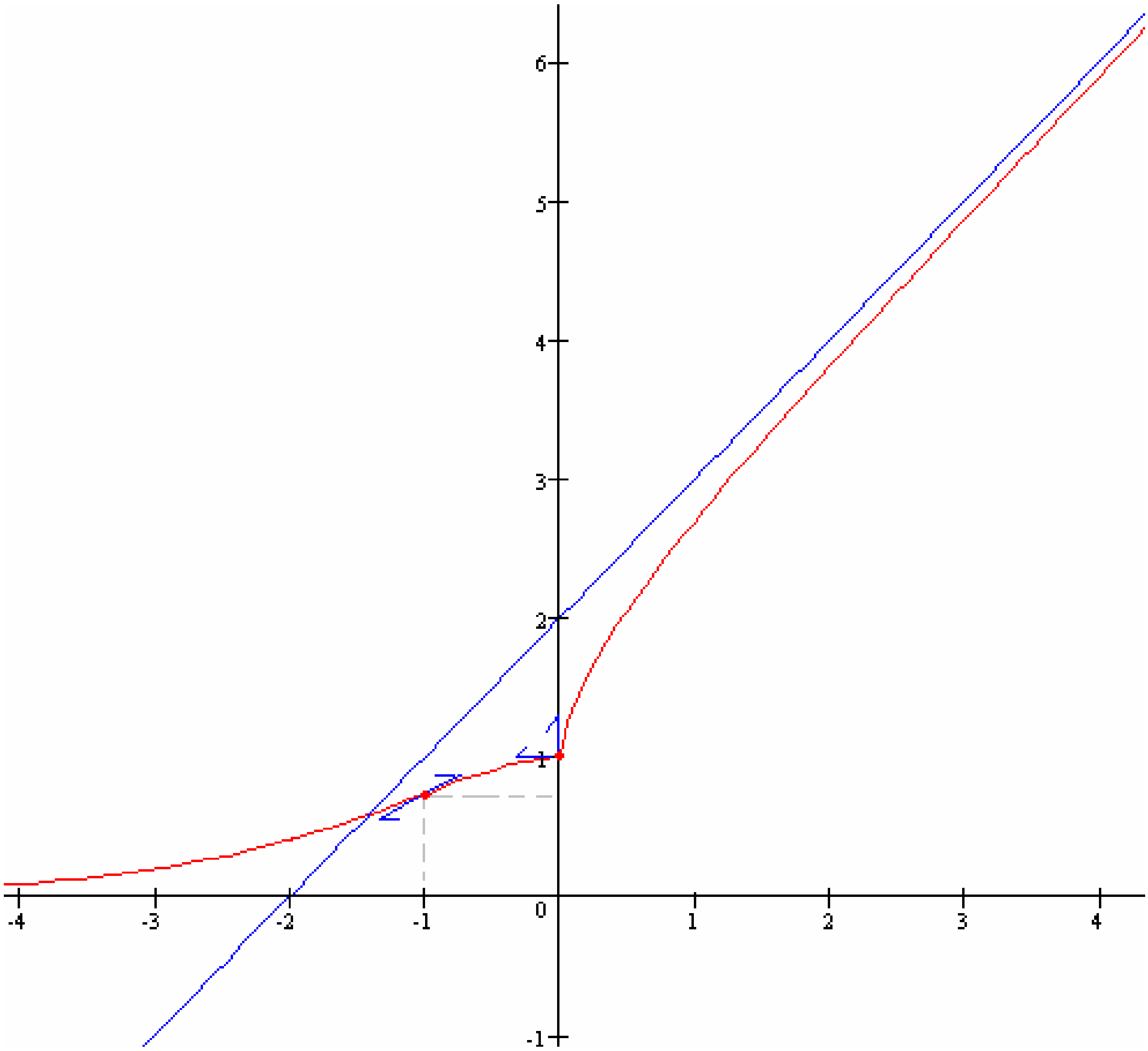
اذن النقطة $A$ ذات الافصول -1 نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$

5- نبين أن المستقيم ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)-(x+2)=\lim_{x\to +\infty}x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-1=1-1=0$$

اذن المستقيم ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$.

6- ننشئ المنحنى $(C_f)$.



6
5
4
3
2
1
0
-1
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

| | | |
|---|---|---|
| المستوى: الثانية باكلوريا<br>الشـعـبـة: علـوم تجريبية | الامتحان التجريبي الموحد<br>مدة الإنجاز : ثلاث ساعات | ثانوية موسى بن نصير سيدي يوسف<br>مراكـــــــش 2006/2005 |



| | سلم التنقيط |
|---|---|
| **التمرين الأول (3 ن)** | |
| في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر النقط $\mathrm{A}(0,1,1)$ و $\mathrm{B}(1,1,0)$ و $C(0,-1,-1)$. | |
| 1) a)- احسب $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\wedge\overrightarrow{AC}$ . | 0,5 |
| b)- استنتج أن النقط A و B و $C$ غير مستقيمية. | 0,25 |
| 2) تحقق أن معادلة ديكارتية للمستوى $(\mathrm{ABC})$ هي : $x-y+z=0$ . | 0,5 |
| 3) لتكن الفلكة $(S)$ التي معادلتها هي $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4=0$ | |
| a)- حدد مركز و شعاع $(S)$. | 0,5 |
| b)- بين أن المستوى $(\mathrm{ABC})$ يقطع الفلكة $(S)$ وفق دائرة $(\Gamma)$ | 0,25 |
| c)- حدد مركز وشعاع $(\Gamma)$. | 0,5 |
| 4) حدد معادلة ديكارتية لكل من المستويين الموازيين للمستوى $(\mathrm{ABC})$ و المماسين للفلكة $(S)$. | 0,5 |
| **التمرين الثاني ( 3,5 ن)** | |
| نعتبر المعادلة: $(E):\ z\in\mathbb{C}\ ;\ \ z^2-\left(\sqrt{3}+3i\right)z-2+2i\sqrt{3}=0$ | |
| 1) a)- حدد الشكل الجبري للعدد العقدي $\left(-\sqrt{3}+i\right)^2$ | 0,25 |
| b)- حل المعادلة $(E)$. | 0,5 |
| 2) في المستوى العقدي $P$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\Re=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ نعتبر النقط A و B و $C$ التي ألحاقها هي : | |
| $a=2i$ و $b=\left(\sqrt{3}+i\right)$ و $c=\sqrt{3}+3i$ على التوالي. | |
| a) اكتب $b$ و $c$ على الشكل المثلثي. | 0,5 |
| b) أنشئ النقط A و B و $C$ | 0,5 |
| 3) a)- اكتب العدد $\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right)$ على الشكل المثلثي | 0,5 |
| b)- استنتج طبيعة المثلث $ABC$ . | 0,5 |
| 4) a)- تحقق أن $b=c-a$ | 0,25 |
| b)- استنتج طبيعة الرباعي $OBCA$. | 0,5 |
| **التمرين الثالث ( 1,5 ن)** | |
| صندوق A يضم 3 كرات تحمل الرقم 0 و كرتين تحملان الرقم 1 وصندوق B يضم كرتين تحملان الرقم 0 و كرتين تحملان الرقم 1 . | |
| نسحب بالتتابع وبدون إحلال كرتين من A ثم نسحب كرة واحدة من B | |
| 1) ما هو عدد النتائج الممكنة | 0,5 |
| 2) ما هو عدد النتائج التي تكون فيها الكرات الثلاث تحمل الرقم 0 . | 0,5 |
| 3) ما هو عدد النتائج التي يكون فيها مجموع أرقام الكرات الثلاث يساوي 2 . | 0,5 |
| **التمرين الرابع ( 2 ن)** | |
| 1) احسب التكاملين : $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left\|e^x-1\right\|dx$ و $\displaystyle\int_{e}^{e^2}\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)dx$ | 1 |
| 2) ليكن $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right]$ | |
| a) تحقق أن: $\dfrac{1+\tan^2(x)}{\tan^2(x)}=\dfrac{1}{\sin^2(x)}$ . | 0,25 |
| b) احسب $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{1}{\sin^2(x)}\right)dx$ | 0,25 |
| 3) باستعمال المكاملة بالأجزاء مرتين احسب التكامل $J=\displaystyle\int_{1}^{e}\cos\left(\pi\ln(x)\right)dx$ | 0,5 |

| سلم التنقيط | |
| --- | --- |
| | **مسألة ( 10 ن)** |
| | الجزء الأول: |
| | نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x)=e^{x}-x-1$ |
| 0,5 | 1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ |
| 0,25 | 2) a)- احسب $g'(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}$. |
| 0,25 | b)- ضع جدول تغيرات الدالة $g$. |
| 0,5 | c)- استنتج أنه: $(\forall x\in\mathbb{R}^{*}),\ g(x)>0$ |
| 0,75 | 3) بين أن للمعادلة $[x\in\mathbb{R},\ g(x)=x]$ حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]1,2[$. |
| | الجزء الثاني: |
| | لتكن الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ بحيث $\begin{cases} f(x)=e^{-x}+\ln(x+1); x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1 \quad ; \quad x<0 \end{cases}$ |
| | وليكن $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوى $P$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\Re=(O,\vec{i},\vec{j})$. |
| 0,75 | 1) حدد $D_f$ ونهايتي $f$ عند $+\infty$ و $-\infty$. |
| 1,25 | 2) بين أن: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right)=0$ ثم أعط تأويلا جبريا و هندسيا للنتيجة. |
| 0,25 | 3) a)- بين أنه: $(\forall x\in]0,+\infty[),\ f'(x)=\dfrac{e^{-x}g(x)}{(x+1)}$ |
| 0,5 | b)- احسب $f'(x)$ لكل $x\in]-\infty,0[$ و بين أن إشارتها هي إشارة $(x+1)$ على هذا المجال. |
| 0,5 | c)- ضع جدول التغيرات للدالة $f$. |
| 0,25 | 4) a)- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ |
| 0,5 | b)- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(C_f)$. |
| 1 | c)- أنشئ المنحنى $(C_f)$. |
| 0,5 | 5) احسب مساحة الحيز $(\Delta)$ المحصور بين المنحنى $(C_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمان اللذان معادلتهما هي $x=0$ و $x=1$ |
| | الجزء الثالث: |
| | لتكن المتتالية العددية $(U_n)$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} U_0=\ln(2) \\ (\forall n\in\mathbb{N}),\ U_{n+1}=g(U_n) \end{cases}$ |
| 0,5 | 1) احسب $U_1$ و تحقق أن $0<U_1<U_0<\alpha$ [ $\alpha$ هو العدد الوارد في السؤال الثالث من الجزء الأول ]. |
| 0,5 | 2) بين أنه: $(\forall n\in\mathbb{N}),0<U_n<\alpha$ |
| 0,5 | 3) بين أن $(U_n)$ تناقصية. |
| 0,75 | 4) استنتج أن $(U_n)$ متقاربة و احسب نهايتها. |

***ملاحظة:*** يراعى في التصحيح سلامة التعبير و حسن التقديم

**حظ سعيد للجميع**

**التمرين الأول:**

1) a- لدينا $\overrightarrow{AB}(1,0,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,-2,-2)$ إذن

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&-2\\-1&-2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\-1&-2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\0&-2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}=\boxed{-2\left(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)}$$

b- بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فإن النقط $A$ و $B$ و $C$ غير مستقيمية.

2) نستنتج من 1) a) أن المتجهة $\vec{n}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ منظمية على المستوى $(ABC)$ إذن معادلة هذا الأخير هي على شكل:

$$x-y+z+d=0$$

وبما أن $A(0,1,1)\in(ABC)$ فإن $d=0$ و بالتالي فإن:

$$\boxed{(ABC): x-y+z=0}$$

3) a- يمكن لمعادلة الفلكة $(S)$ أن تكتب : $\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2+(z)^2=(1)^2}$ إذن شعاع $(S)$ هو $\boxed{R=1}$

و مركزها هو $\boxed{\Omega(1,2,0)}$

b- لتكن $d$ مسافة $\Omega$ عن المستوى $(ABC)$ لدينا:

$$d=\frac{|1-2+0|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$ إذن $d<R$ و بالتالي

فإن: المستوى $(ABC)$ يقطع الفلكة $(S)$ وفق دائرة $(\Gamma)$

c- **ليكن $R'$ شعاع $(\Gamma)$؛ $R'=\sqrt{R^2-d^2}=\boxed{\sqrt{6}/3}$

**لتكن النقطة $H(x_H,y_H,z_H)$ مركز $(\Gamma)$؛ نجد من

$$\begin{cases}x_H=1+k\\y_H=2-k\\z_H=k\end{cases}$$ و $x_H-y_H+z_H=0$ ؛ $k\in\mathbb{R}$ : $\boxed{H\begin{pmatrix}4/3\\5/3\\1/3\end{pmatrix}}$

4) لبكن $(P)$ أحد المستوين الموازيين ل $(ABC)$ و المماسين ل $(S)$

معادلة $(P)$ هي على شكل: $x-y+z+m=0/m\in\mathbb{R}$

لتكن $d'$ مسافة $\Omega$ عن $(P)$ لدينا $d'=R$ و

$$d'=R\Leftrightarrow\frac{|1-2+0+m|}{\sqrt{3}}=1\Leftrightarrow m=1-\sqrt{3} \text{ أو } m=1+\sqrt{3}$$

وباتالي فإن المستويين الموازيين ل $(ABC)$ و المماسين ل $(S)$ هما:

$$\boxed{\begin{cases}(P_1): x-y+z+1-\sqrt{3}=0\\(P_2): x-y+z+1+\sqrt{3}=0\end{cases}}$$

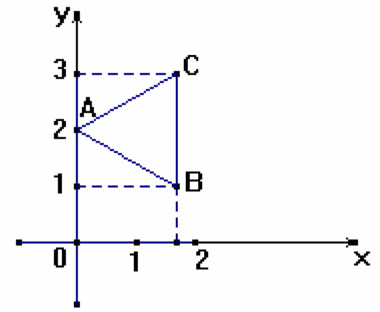
**التمرين الثاني:** $(E): z\in\mathbb{C}; z^2-(\sqrt{3}+3i)z-2+2i\sqrt{3}=0$

1) a- $(-\sqrt{3}+i)^2=2-2i\sqrt{3}$

b- مميز $(E)$ هو $\Delta=2-2i\sqrt{3}=(-\sqrt{3}+i)^2\neq0$، إذن ل $(E)$ حلين مختلفين هما: $a=2i$ و $b=(\sqrt{3}+i)$ وبالتالي: $\boxed{S=\{a,b\}}$

2) a- $b=\left[2,\pi/6\right]$ و $c=\left[2\sqrt{3},\pi/3\right]$

b- إنشاء $A(a=2i)$ و $B(b=\sqrt{3}+i)$ و $C(c=\sqrt{3}+3i)$:




3) a- $$\left(\frac{b-a}{c-a}\right)=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\boxed{\left[1,-\frac{\pi}{3}\right]}$$

b- نستنتج أن $\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متساوي الأضلاع}}$

4) a- $c-a=(\sqrt{3}+3i)-(2i)=\sqrt{3}+i=b$

b- لدينا $c-a=b-0$ إذن $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$ ولدينا المثلث $ABC$ متساوي الأضلاع ومنه فإن $\boxed{\text{الرباعي } OBCA \text{ معين}}$.

**التمرين الثالث:**

1) عدد النتائج الممكنة هو: $A_5^2\times A_4^1=(5\times4)\times4=\boxed{80}$

2) عدد النتائج التي تكون فيها الكرات الثلاث تحمل الرقم0 هو:

$$A_3^2\times A_2^1=(3\times2)\times2=\boxed{12}$$

3) عدد النتائج التي يكون فيها مجموع أرقام الكرات الثلاث يساوي2هو

$$A_2^2\times A_2^1+A_2^1\times A_3^1\times A_2^1+A_3^1\times A_2^1\times A_2^1=\boxed{28}$$

**التمرين الرابع:**

1) **

$$\int_{-1}^{1}\left|e^x-1\right|dx=\int_{-1}^{0}(1-e^x)dx+\int_{0}^{1}(e^x-1)dx$$

$$=\left[x-e^x\right]_{-1}^{0}+\left[e^x-x\right]_{0}^{1}=\boxed{\frac{1}{e}+e-2}$$

**

$$\int_{e}^{e^2}\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)dx=\int_{e}^{e^2}\frac{\ln'(x)}{\ln(x)}dx$$

$$=\left[\ln\left(\ln(x)\right)\right]_{e}^{e^2}=\boxed{\ln(2)}$$

2) a- ليكن $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$،

$$\frac{1}{\sin^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\sin^2(x)}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}+\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}{\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}=\boxed{\frac{1+\tan^2(x)}{\tan^2(x)}}$$

b-

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{dx}{\sin^2(x)}=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{1+\tan^2(x)}{\tan^2(x)}\right)dx$$

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\tan'(x)}{\tan^2(x)}dx=\left[-\frac{1}{\tan(x)}\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=\boxed{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(3

$$J=\left[x\cos\left(\pi\ln(x)\right)\right]_1^e+\pi\int_1^e x\sin\left(\pi\ln(x)\right)\frac{1}{x}dx$$

$$=-(e+1)+\pi\int_1^e\sin\left(\pi\ln(x)\right)dx=-(e+1)+\pi K$$

$$K=\left[x\sin\left(\pi\ln(x)\right)\right]_1^e-\pi\int_1^e x\cos\left(\pi\ln(x)\right)\frac{1}{x}dx$$

إذن $K=-\pi J$

وبالتـــــــــالي $J=-(e+1)-\pi^2 J$

ومنـــــــه $\boxed{J=-\left(\dfrac{e+1}{\pi^2+1}\right)}$

**مسألة:**

الجزء الأول:

(1 $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x-1\right)=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-1-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$

(2 a- $(\forall x\in\mathbb{R})\ ,\ g'(x)=e^x-1$

b-

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| g'(x) | | | 0 | | |
| g(x) | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

c- بما أن 0 قيمة دنيا مطلقة للدالة $g$ عند 0 فإنه:

$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ,\ g(x)>0}$

(3 نعتبر الدالة $h$ بحيث: $(\forall x\in]1,2[), h(x)=g(x)-x$ ، لدينا:

$\begin{cases}(\forall x\in]1,2[), \\ h'(x)=e^x-2>0 \\ h(1)\times h(2)<0\end{cases}$ إذن $(\exists!\alpha\in]1,2[)/h(\alpha)=0$

وبالتالي للمعادلة $[x\in\mathbb{R}, g(x)=x]$ حل وحيد في المجال $]1,2[$

الجزء الثاني:

(1 $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1\right)=\boxed{1}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-x}+\ln(x+1)\right]=\boxed{+\infty}$

(2 لدينا $f(0)=1$ إذن

$$*\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{\substack{t\to0\\t>0}}\left[t\ln^2(t)\right]$$

$$=\lim_{\substack{t\to0\\t>0}}\left[2\sqrt{t}\ln(\sqrt{t})\right]^2=\boxed{0}$$

و

$$*\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left[\frac{e^{-x}+\ln(x+1)-1}{x}\right]$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left[-\frac{1}{e^x}\frac{e^x-1}{x}+\frac{\ln(x+1)}{x}\right]=-1+1=\boxed{0}$$

نستنتج جبريا أن $f$ قابلة للإشتقاق في 0 و أن $f'(0)=0$

و نستنتج هندسيا أن $(C_f)$ يقبل في 0 مماس معادلته $y=f(0)$

أي $\boxed{y=1}$

(3 a-

$$(\forall x\in]0,+\infty[)\ ,\ f'(x)=\left[e^{-x}+\ln(x+1)\right]'$$

$$=-e^{-x}+\frac{1}{x+1}=e^{-x}\left(\frac{e^x}{x+1}-1\right)$$

$$=e^{-x}\left(\frac{e^x-x-1}{x+1}\right)=\boxed{\frac{e^{-x}g(x)}{(x+1)}}$$

b-

$$(\forall x\in]-\infty,0[)\ ,\ f'(x)=\left(\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1\right)'$$

$$=\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=\boxed{\left(-\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\right)(x+1)}$$

بماأن $x<0$ فإن $\left(-\dfrac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\right)>0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x+1$.

c-

| x | $-\infty$ | | -1 | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | - | 0 | + | 0 | + | |
| f(x) | 1 | ↘ | $1-\frac{1}{e}$ | ↗ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

(4 a-

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}+\ln(x+1)}{x}$$

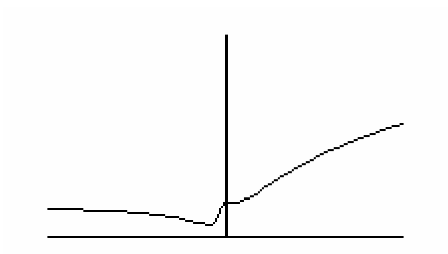
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{xe^x}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=0$$

b-

* $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل

* $(C_f)$ يقبل مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته هي: $y=1$

c-



(5

$$\lambda(\Delta)=\int_0^1\left(e^{-x}+\ln(x+1)\right)dx$$

$$=\left[-e^{-x}+(x+1)\ln(x+1)-(x+1)\right]_0^1$$

$$=\boxed{-e^{-1}+2\ln(2)}$$

R

الجزء الثالث:

1)

* $U_1 = g(U_0) = e^{\ln(2)} - \ln(2) - 1$ (لأن $U_0 = \ln(2)$)
$= 2 - \ln(2) - 1 = \boxed{1 - \ln(2)}$

* بماأن $2 < \alpha < 1$ و $\ln(2) < 1$ فإن: $0 < 1 - \ln(2) < \ln(2) < 1 < \alpha$
وبالتالي فإن: $\boxed{0 < U_1 < U_0 < \alpha}$

2) نبين بالترجع على $n$ من $\mathbb{N}$ أن $0 < U_n < \alpha$

*أساس الترجع: $0 < U_0 < \alpha$ و ذلك حسب السؤال السابق

*فرضية الترجع:ليكن $n \in \mathbb{N}$، نفترض أن $0 < U_n < \alpha$ و نبين أن: $0 < U_{n+1} < \alpha$.
نعلم أن $g$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+$ إذن بالخصوص على $[0,\alpha]$
وبما أن $0 < U_n < \alpha$ فإن $g(0) < g(U_n) < g(\alpha)$ و حيث إن
$g(0) = 0$ و $g(\alpha) = \alpha$ و $g(U_n) = U_{n+1}$ فإن $0 < U_{n+1} < \alpha$

*خاتمة: $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < U_n < \alpha}$

3) نبين بالترجع على $n$ أن $0 < U_{n+1} < U_n < \alpha$

*أساس الترجع: $0 < U_1 < U_0 < \alpha$ وذلك حسب السؤال 1)

*فرضية الترجع: ليكن $n \in \mathbb{N}$، نفترض أن $0 < U_{n+1} < U_n < \alpha$ و
نبين أن: $0 < U_{n+2} < U_{n+1} < \alpha$.
نعلم أن $g$ تزايدية قطعا على $[0,\alpha]$ إذن نستنتج من الإفتراض أن
$g(0) < g(U_{n+1}) < g(U_n) < g(\alpha)$ و بالتالي فإن:
$0 < U_{n+2} < U_{n+1} < \alpha$

*خاتمة: $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < U_{n+1} < U_n < \alpha$
إذن المتتالية $\boxed{(U_n) \text{ تناقصية}}$

4) نعتبر المجال $\mathrm{I} = [0,\alpha]$ ، لدينا
* $\boxed{g \text{ متصلة}}$ و تزايدية قطعا على $\mathrm{I}$ وحيث $g(0) = 0 / g(\alpha) = \alpha$
فإن $g(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$ إذن $\boxed{g(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}}$
* $0 < U_0 < \alpha$ إذن $\boxed{U_0 \in \mathrm{I}}$
* $(U_n)$ تناقصية و مصغورة إذن $\boxed{(U_n) \text{ متقاربة}}$
بهذه المعطيات نستنتج أن نهاية $(U_n)$ ، $l$، تحقق $l \in \mathrm{I}$ و $g(l) = l$
و بما أن $0$ و $\alpha$ هما الحلين الوحيدين في $\mathrm{I}$ للمعادلة $g(l) = l$ و
$(U_n)$ تناقصية فإن $l = 0$
خاتمة: $\boxed{\lim_{n \to +\infty} (U_n) = 0}$.

R

| | | |
|---|---|---|
| الإمتحان التجريبي لنيل شهادة الباكا لو ر يا<br>دورة أ بريل 2006 | الصفحة | 1 / 3 |
| | مدة الإ نجا ز | 3 ساعات |
| ا لمادة : الرياضيات<br>الشعبة : علوم تجريبية<br>المؤ سسة : ثانوية المختار ا لسوسي - المعازيز - نيابة الخميسات | المعامل | 7 |

## التمرين الأول : ( 2.5ن )

نعتبر المتتالية $(u_n)$ :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{9}{4} \end{cases}$$

لتكن $(v_n)$ المتتالية المعرفة بما يلي : $v_n = u_n + k$ ( $k$ عدد حقيقي ثابت غير مرتبط بالعدد $n$ )

1ن 1) أحسب $v_{n+1}$ بدلالة $u_n$ ثم بدلالة $v_n$ .

0.5ن 2) حدد $k$ بحيث تكون $(v_n)$ متتالية هندسية .

1ن 3) حدد نهايتي $(u_n)$ و $(v_n)$ .

---

## التمرين الثاني : ( 2.5 ن )

الفضاء $(E)$ منسوب على معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط الآتية :
$A(2;0;2)$ و $B(1;-1;3)$ و $C(0;-2;1)$

1ن 1) أحسب $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ .

0.5ن 2) حدد معادلة ديكارتية للمستوى $ABC$

1ن 3) أعط معادلة ديكارتية للفلكة $(S)$ التي مركزها $A$ و تقطع $ABC$ حسب الدائرة التي مركزها $B$ و شعاعها 2 .

---

## التمرين الثالث : ( 3.5ن )

نعتبر صندوق يحتوي على ثلاث كرات صفراء , كرتين زرقاوتين , كرة حمراء و أربع كرات خضراء لايمكن التمييز بين الكرات باللمس .

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق .

1ن 1 - أحسب إحتمالات الأحداث التالية :

$J$ : " سحب كرة صفراء "

$B$ : " سحب كرة زرقاء "

$R$ : " سحب كرة حمراء "

$V$ : " سحب كرة خضراء "

2 - نعتبر الآن أ ن السحب مرتبط بربح عدد من الدراهم حسب الشروط التالية :
- إ ذ ا كانت الكرة المسحوبة حمراء نربح 10 دراهم .
- إ ذ ا كانت الكرة المسحوبة خضراء نربح درهمان .
- إ ذ ا كانت الكرة المسحوبة صفراء أو زرقاء نربح 3 دراهم .

ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الدراهم المربوحة .

1ن أ- حدد قانون إحتمال المتغير العشوائي $X$ .

1.5ن ب - أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ و المغايرة $V(X)$ .

## التمرين الرابع : ( 3ن)

نعتبر في $C$ المعادلة التالية : $(E) : z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = 0$

1ن 1 - تأكد من أن : $z_0 = 4$ حل للمعادلة $(E)$ . ثم حدد الأعداد a و b و c بحيث تكتب على شكل :

$$(E) : (z-4)(az^2 + bz + c) = 0$$

1ن 2 - حل المعادلة $(E)$ . نرمز ب $z_1$ و $z_2$ بحيث لحلي المعادلة بحيث $\mathrm{Im}(z_1) \geq 0$ و $\mathrm{Im}(z_2) \leq 0$

حدد الشكل الأسي ل $z_1$ و $z_2$ .

1ن 3 – بين أن النقط $M_0 \; ; M_1 \; ; M_2$ التي لواحقها على التوالي $z_0 \; ; z_1 \; ; z_2$ تنتمي إلى دائرة $(\zeta)$ مركزها $\Omega$ ذ ات اللحق $\omega = 2$ و شعاعها $R = 2$ .

## مسأ لة : ( 8.5 ن )

### الجزء الاول :

نعتبر الدالة f للمتغير ا لحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} + \ln|x+1|$$

0.25ن 1) أ - حدد $D_f$ مجموعة تعريف الدالة f .

0.5ن ب - بملاحظة أنه لكل x ينتمي إ لى $D_f$ لدينا :

$$f(x) = \frac{x+2+(x+1)\ln|x+1|}{x+1}$$

أحسب نهاية f على اليمين عند النقطة 1 - .

1ن ج - أ د رس الدالة f ( ا لنهايات - التغيرات )

2) ليكن $(C)$ المنحنى الممثل للدالة f في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

0.5ن أ - بين أ ن للمنحنى $(C)$ نقطة ا نعطاف و حدد إحداثيتيها .

ب - أكتب معادلتي المما سين للمنحنى عند النقطة التي أ فصولها 2 - و عند النقطة I .

0.5ن ج - أ د رس الفرع اللا نهائي للمنحنى $(C)$ .

0.5ن د - أنشئ $(C)$ . $(\ln(2)=0,7)$

0.5ن 3 ) آستنتج مما سبق إشارة $f(x)$ عندما يتغير x على $D_f$ .

**الجزء الثاني :**

نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} g(x)=e^{(x+2)\ln|x+1|} & , x\neq -1 \\ g(-1)=0 \end{cases}$$

0.5ن 1 ) أ - بين أ نه لكل عدد حقيقي x مختلف عن 1- لدينا: $g(x)=|x+1|.e^{(x+1).\ln|x+1|}$

0.25ن ب - بين أن الدالة g متصلة عند النقطة 1 - .

0.5ن ج - أدرس آشتقاق الدالة g عند النقطة 1 - .

1ن 2) أ د رس ا لدا لة g ( النهايات – التغيرات ) ( من أجل دراسة تغيرا ت يمكن آستعمال س 3) من الجزء الاول )

3) ليكن $(\Gamma)$ المنحنى الممثل للدالة g في م , م , م $(\Omega;\vec{u};\vec{v})$ .

0.5.ن أ - أ درس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\Gamma)$ .

1ن ب - أرسم $(\Gamma)$ ( بدون محاولة البحث عن نقطة الإ نعطاف ) .

1ن 4) آستعمل لإعطاء عدد حلول المعادلة : $m^{\frac{1}{x+2}}=|x+1|$ : $x\in IR$ حسب قيم m .

**من إنجاز الأستاذ : علي الشريف**

cherifalix@yahoo.fr

| الشعبة : علوم تجريبية<br>ثانوية المختار السوسي<br>المعازيز نيابة الخميسات | تصحيح الإمتحان التجريبي لنيل شهادة<br>الباكالوريا دورة أبريل 2006<br>❶ http://arabmaths.ift.fr❶ | من إنجاز الأستاذ: علي الشريف<br>المادة : الرياضيات<br>cherifalix@yahoo.fr |
|---|---|---|

## التمرين الأول :

نعتبر المتتالية $(u_n)$ : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{9}{4} \end{cases}$

لتكن $(v_n)$ المتتالية المعرفة بما يلي : $v_n = u_n + k$

( $k$ عدد حقيقي ثابت غير مرتبط بالعدد $n$ )

**1) حساب $v_{n+1}$ بدلالة $u_n$ ثم بدلالة $v_n$ .**

لدينا :
$$v_{n+1} = u_{n+1} + k = \frac{1}{4}.u_n + \frac{9}{4} + k$$
$$= \frac{1}{4}(v_n - k) + \frac{9}{4} + k$$

و منه :
$$v_{n+1} = \frac{1}{4}.v_n + \frac{3}{4}.k + \frac{9}{4}$$

**2) تحديد $k$ بحيث تكون $(v_n)$ متتالية هندسية .**

من أجل ذلك يكفي أن يكون : $\frac{3}{4}.k + \frac{9}{4} = 0$

يعني : $k = -3$

إذن في هذه الحالة تكون المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

و حدها الاول : $v_0 = u_0 - 3 = 1$

**3) حساب نهايتي $(u_n)$ و $(v_n)$ .**

بما أن $(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ و حدها الاول $v_0 = 1$ .

فإن : $v_n = v_0.\left(\frac{1}{4}\right)^{n-0}$ يعني : $v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

بما أن : $0 \langle \frac{1}{4} \langle 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

و بما أن : $v_n = u_n + k$ فإن : $u_n = v_n - k$

يعني : $u_n = v_n + 3$

و منه : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3}$

---

## التمرين الثاني :

الفضاء $(E)$ منسوب على معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط : $A(2;0;2)$ و $B(1;-1;3)$ و $C(0;-2;1)$

**1) حساب $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ :**

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1\,;-1\,;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\,;-2\,;-1)$

إذن :
$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}.\vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}.\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}.\vec{k}$$

يعني : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$

**2) معادلة ديكارتية للمستوى $(ABC)$ :**

لدينا المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى $ABC$

إذن : $(ABC): 3x - 3y + d = 0$

بما أن : $A \in (ABC)$ فإن : $d = -6$ .

و بالتالي : $(ABC): 3x - 3y - 6 = 0$

**3) معادلة ديكارتية للفلكة $(S)$ التي مركزها $A$ و تقطع $(ABC)$ حسب الدائرة $(\zeta)$ التي مركزها $B$ و شعاعها 2 .**

**ليكن R شعاع الفلكة $(S)$ و r شعاع الدائرة $(\zeta)$ .**

لدينا: $d^2 + r^2 = R^2$

بحيث : $d = AB = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ و $r = 2$ .

و منه : $R = \sqrt{d^2 - r^2} = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$

R

| | | |
|---|---|---|
| الشعبة : علوم تجريبية<br>ثانوية المختار السوسي<br>المعازيز نيابة الخميسات | تصحيح الإمتحان التجريبي لنيل شهادة<br>الباكالوريا دورة أبريل 2006<br>❷ http://arabmaths.ift.fr❷ | من إنجاز الأستاذ: علي الشريف<br>المادة : الرياضيات<br>cherifalix@yahoo.fr |

و بالتالي : $(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=7$

يعني : $x^2+y^2+z^2-4x-4z+1=0$

---

## التمرين الثالث :

نعتبر صندوق يحتوي على ثلاث كرات صفراء , كرتين زرقاوتين , كرة حمراء و أربع كرات خضراء لايمكن التمييز بين الكرات باللمس . نسحب عشوائيا كرة من الصندوق .

**1 - حساب إحتمالات الأحداث التالية :**

$J$ : " سحب كرة صفراء " $P(J)=\dfrac{3}{10}$

$B$ : " سحب كرة زرقاء " $P(B)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

$R$ : " سحب كرة حمراء " $P(R)=\dfrac{1}{10}$

$V$ : " سحب كرة خضراء " $P(V)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

**2 - نعتبر الآن أن السحب مرتبط بربح عدد من الدراهم حسب الشروط التالية :**

- إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نربح 10 دراهم .
- إذا كانت الكرة المسحوبة خضراء نربح درهمان .
- إذا كانت الكرة المسحوبة صفراء أو زرقاء نربح 3 دراهم .

ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الدراهم المربوحة .

**أ- حدد قانون إحتمال المتغير العشوائي $X$ .**

لدينا : $X(\Omega)=\{2;3;10\}$

إذن : $P(X=2)=P(V)=\dfrac{2}{5}$

$$P(X=3)=P(J\cup B)=P(J)+P(B)-P(J\cap B)$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=10)=P(R)=\frac{1}{10}$$

و بالتالي قانون إحتمال المتغير العشوائي $X$ :

| $(X=x_i)$ | 2 | 3 | 10 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{10}$ |

**ب - حساب الأمل الرياضي $E(X)$ :**

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i.P(X=x_i)$$
$$=2.\frac{2}{5}+3.\frac{1}{2}+10.\frac{1}{10}=\frac{33}{10}$$

**- حساب المغايرة $V(X)$ :**

$$V(X)=\sum_{i=1}^{3}p_i.(x_i-E(x))^2$$
$$=\frac{2}{5}.\left(2-\frac{33}{10}\right)^2+\frac{1}{2}.\left(3-\frac{33}{10}\right)^2+\frac{1}{10}.\left(10-\frac{33}{10}\right)^2$$

---

## التمرين الرابع :

نعتبر في $C$ المعادلة التالية : $(E):z^3-8z^2+24z-32=0$

**1 ) $z_0=4$ حل للمعادلة $(E)$ :**

$$4^3-8\times4^2+24\times4-32=0$$

**تحديد الأعداد a و b و c بحيث $(E)$ تكتب على شكل :**

$$*\quad (E):(z-4)(az^2+bz+c)=0$$

$$(z-4)(a.z^2+b.z+c)=a.z^3+b.z^2+c.z$$
$$-4.a.z^2-4.b.z-4c$$
$$=a.z^3+(b-4a).z^2+(c-4b).z-4c$$

إذن $(E)$ **تكتب على الشكل** * يعني :

$$a.z^3+(b-4a).z^2+(c-4b).z-4c$$
$$=z^3-8.z^2+24.z-32$$

| الشعبة : علوم تجريبية<br>ثانوية المختار السوسي<br>المعازيز نيابة الخميسات | تصحيح الإمتحان التجريبي لنيل شهادة<br>الباكالوريا دورة أبريل 2006<br>❸ http://arabmaths.ift.fr❸ | من إنجاز الأستاذ: علي الشريف<br>المادة : الرياضيات<br>cherifalix@yahoo.fr |
|---|---|---|

$$\begin{cases} a=1\\ b-4a=-8\\ c-4b=24\\ -4c=-32\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a=1\\ b=-8+4=-4\\ c=24+4b=24-16=8\\ c=\frac{32}{4}=8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a=1\\ b=-4\\ c=8\end{cases}$$

و بالتالي : $(E):(z-4)(z^2-4.z+8)=0$

2 - حل المعادلة $(E)$ . نرمز ب $z_1$ و $z_2$ بحيث لحلي المعادلة

بحيث : $\operatorname{Im}(z_1)\ge 0$ و $\operatorname{Im}(z_2)\le 0$ .

المعادلة $(E)$ تكافئ : $(E):(z-4)(z^2-4.z+8)=0$

تكافئ : $(z^2-4.z+8)=0$ أو $(z-4)=0$

$(z^2-4.z+8)=0$ : $\Delta'=4-8=-4=(2i)^2$

إذن : $z_1=2+2.i$ و $z_2=2-2.i$

و بالتالي حلول المعادلة هي : $S=\{\,4\,;2+2i\,;2-2i\,\}$

الشكل الأسي ل $z_1$ و $z_2$ : $z_1=2\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_2=2\sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{4}}$

3 – النقط $M_0\,;M_1\,;M_2$ التي لواحقها على التوالي $z_0\,;z_1\,;z_2$ تنتمي إلى دائرة $(\zeta)$ مركزها $\Omega$ ذات اللحق $\omega=2$ و شعاعها $R=2$ .

لدينا : $|z_0-z_\Omega|=|4-2|=2$ و $|z_1-z_\Omega|=|2i|=2$

و $|z_2-z_\Omega|=|-2i|=2$

و هذا يكافئ أن : $\Omega M_0=\Omega M_1=\Omega M_2$ يعني أن النقط $M_0;M_1;M_2$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $\Omega$ ذات اللحق $\omega=2$ و شعاعها $R=2$ .

## مسألة :

### الجزء الاول :

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\frac{x+2}{x+1}+\ln|x+1|$$

1) أ - مجموعة تعريف الدالة f : $\boxed{D_f=IR-\{-1\}}$

ب - لدينا لكل x ينتمي إلى $D_f$ :

$$f(x)=\frac{x+2+(x+1)\ln|x+1|}{x+1}$$

إذن :
$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x+2+(x+1)\ln|x+1|}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{x+2+(x+1)\ln(x+1)}{x+1}\quad (x+1>0)$$

نعلم أن : $\lim_{t\to0^+}t.\ln(t)=0$ بوضع : $t=x+1$

لدينا : $t\to0^+\Leftrightarrow x\to-1^+$

إذن : $\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{t\to0^+}\frac{t+1+t\ln(t)}{t}=+\infty$

ج - دراسة الدالة f ( - التغيرات )

النهايات : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ , $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

, $\lim_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$

التغيرات : $f'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ : $(\forall x\in D_f)$

جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $2$ | ↗ $+\infty$ |

| الشعبة : علوم تجريبية<br>ثانوية المختار السوسي<br>المعازيز نيابة الخميسات | تصحيح الإمتحان التجريبي لنيل شهادة<br>الباكالوريا دورة أبريل 2006<br>❹ http://arabmaths.ift.fr❹ | من إنجاز الأستاذ: علي الشريف<br>المادة : الرياضيات<br>cherifalix@yahoo.fr |
|---|---|---|

نقطة الإنعطاف :

لدينا : $$(\forall x \in D_f) : f''(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$$

نستنتج أن : $(C)$ يقبل $I(1\,;\,f(1))$ كنقطة انعطاف .

تقعر المنحنى :

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $-1$ $\quad$ $1$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ ‖ $+$ $\quad 0 \quad$ $-$ |
| $(C)$ | ∪ ‖ ∪ نقطة انعطاف ∩ |

ب – معادلة المماس عند النقطة التي أفصولها 2 - :

$$\Leftrightarrow \quad y = (x+2)f'(-2) + f(-2)$$

$$\boxed{y = -2x - 4}$$

- معادلة المماس عند النقطة $I(1\,;\,f(1))$ :

$$\Leftrightarrow \quad y = (x-1)f'(1) + f(1)$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4} + \ln(2)$$

ج – الفروع اللانهائية :

* لدينا : $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ و

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ و هذا يعني أن $(C)$ يقبل المستقيم الذي معادلته : $x = -1$

مقارب عمودي بجوار 1 - .

لدينا :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x}\cdot\frac{\ln(|x+1|)}{x+1}$$

$$= 0$$

إذ ن $(C)$ يقبل محور الافاصيل آتجاه مقارب بجوار $\pm\infty$ .

د – إنشاء المنحنى $(C)$ :

ملاحظة : قبل إنشا ء ا لمنحنى يجب آتباع الخطوات التالية :

1 ) قراءة جيدة لجدول التغيرات و تقعر المنحنى و أخذ فكرة عن الشكل الذي سيأخذه المنحنى .

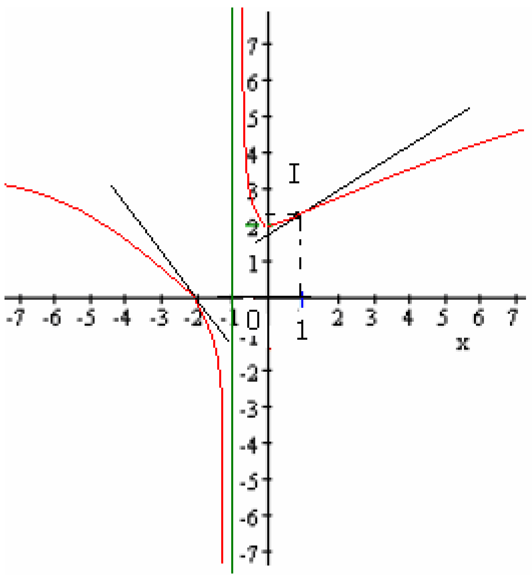
2 ) إنشاء المقاربات إنطلاقا من النتائج المحصل عليها .

3 ) إنشاء النقط التي توجد بها قيم دنوية أو قصوية للمنحنى $(C)$ و نقطة الإنعطاف. ( في حالة وجودها )

4 ) إنشاء المستقيمات ا لمماسات التي طلب تحديد معادلتها .

5 ) قراءة للوضع النسبي للمنحنى $(C)$ مع المقاربات و المماسات إما عن طريق جدول التغيرات أو بواسطة تحديد الإشارة

6 ) الإنشاء :



الشعبة : علوم تجريبية
ثانوية المختار السوسي
المعازيز نيابة الخميسات

تصحيح الإمتحان التجريبي لنيل شهادة
الباكالوريا دورة أبريل 2006
❺ http://arabmaths.ift.fr❺

من إنجاز الأستاذ: علي الشريف
المادة : الرياضيات
cherifalix@yahoo.fr

ملاحظة : المماس عند النقطة يخترق المنحنى $(C)$ لأن النقطة **I** نقطة انعطاف .

3) إشارة $f(x)$ من خلال جدول التغيرات نستنتج :

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $-$ |

## الجزء الثاني :

نعتبر الدالة $g$ المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} g(x) = e^{(x+2)\ln|x+1|} \;; & x \neq -1 \\ g(-1) = 0 \end{cases}$$

1 ) أ - لنبين أن لكل عدد حقيقي $x$ مختلف عن $-1$

لدينا : $g(x) = |x+1|e^{(x+1)\ln|x+1|}$

لكل عدد حقيقي $x$ مختلف عن $-1$

لدينا : $g(x) = e^{(x+2)\ln|x+1|}$

$$g(x) = e^{(x+1+1)\ln|x+1|}$$

و هذا يكافئ :

$$= e^{(x+1)\ln|x+1| + \ln|x+1|}$$

$$= e^{\ln|x+1|} \times e^{(x+1)\ln|x+1|}$$

و منه لكل عدد حقيقي $x$ مختلف عن $-1$

لدينا : $g(x) = |x+1|e^{(x+1)\ln|x+1|}$ ( $e^{\ln|x+1|} = |x+1|$ )

ب - اتصال الدالة $g$ عند $-1$ :

* لدينا :

$$\lim_{x\to -1^+} g(x) = \lim_{x\to -1^+} (x+1).e^{(x+1).\ln(x+1)}$$

$$= 0 = g(-1)$$

و

$$\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^-} -(x+1).e^{-(-(x+1)).\ln(-(x+1))}$$

$$= 0 = g(-1)$$

ج - اشتقاق الدالة $g$ عند $-1$ :

* لدينا :

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)e^{(x+1).\ln(x+1)}}{x+1} = 1$$

و

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{-(x+1)e^{-(-(x+1)).\ln-(x+1)}}{x+1} = -1$$

إذن الدالة $g$ غير قابلة للإشتقاق عند $-1$ .

2) الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على $IR - \{-1\}$ .

و لدينا : $(\forall x \in IR - \{-1\}) \;:\; g'(x) = f(x).e^{(x+2).\ln|x+1|}$

نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي إشارة $f(x)$ .

و بالتالي نستنتج جدول تغيرات الدالة $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $+$ |
| $g(x)$ | $0 \nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow +\infty$ |

3) أ - الفروع اللا نهائية :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{|x+1|}{x}.e^{(x+1).\ln|x+1|}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{(x+1)}{x}.e^{(x+1).\ln(x+1)} = +\infty$$

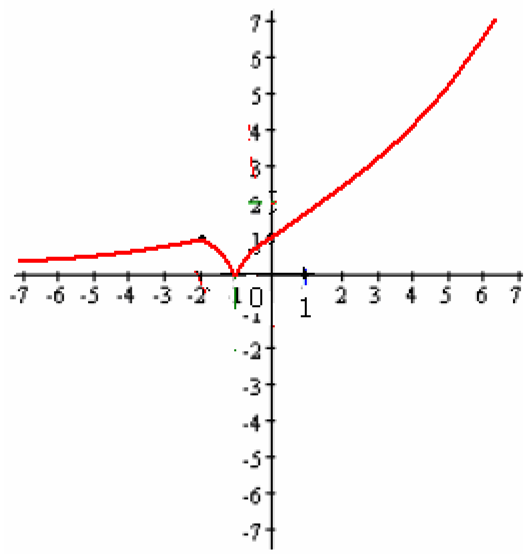
و هذا يعني أن منحنى الدالة $g$ يقبل بجوار $+\infty$ محور الأراتيب فرعا شلجميا .

من إنجاز الأستاذ: علي الشريف
ا لمادة : الرياضيات
cherifalix@yahoo.fr





ب - منحنى الدالة $g$ :




4 ) نعتبر المعادلة : $m^{\frac{1}{x+2}} = |x+1| \quad : \quad x \in IR$

حيث $m$ بارامتر حقيقي .

المعادلة تكافئ : $\left(m^{\frac{1}{x+2}}\right)^{x+2} = |x+1|^{x+2}$

تكافئ أيضا : $m = e^{(x+2).\ln|x+1|}$

تكافئ : $g(x) = m \qquad x \in IR$

من خلا ل التمثيل المبياني للدالة $g$ نستنتج أن:

حلول المعادلة هي أ فاصيل نقط تقاطع المنحنى $(\Gamma)$ و المستقيم الذي معادلته $y = m$ و منه :

1 _ إذا كان : $m \langle 0$ : فإن المعادلة لا تقبل أي حل .

2 _ إذا كان : $m = 0$ : فإن المعادلة تقبل حل وحيد هو العدد 1 - .

3 _ إذا كان : $0 \langle m \langle 1$ : فإن المعادلة تقبل ثلاث حلول .

4 _ إذا كان : $m = 1$ : فإن المعادلة تقبل حلين هما 2 - و 0 .

5 _ إذا كان : $m \rangle 1$ : فإن المعادلة تقبل حل وحيد .

R

R



# ث-ع-العالي بنشقرون
# العرائش
# الامتحان التجريبي2004

## التمرين الأول:(نقطتان)

(1ن)1- احسب التكامل التالي : $I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ (ضع $t = \sqrt{e^x - 1}$).

(1ن)2- احسب باستعمال مكاملة بالأجزاء $J = \int_0^1 Arctg(x)dx$ .

## التمرين الثاني:(3نقط)

يحتوي كيس على خمس بيدقات لا يمكن التمييز بينها باللمس،بيدقتان تحملان الرقم 0وبيدقتان تحملان الرقم1وبيدقة تحمل الرقم2.نسحب عشوائيا وفي آن واحد بيدقتين من الكيس.

1- ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يساوي مجموع الرقمين المسجلين على البيدقتين المسحوبتين.

(1ن) أ- حدد قانون احتمال $X$ .

(0.5 ن) ب- ليكن $A$ الحدث:"سحب بيدقتين تحملان نفس الرقم". تحقق أن $p(A) = \frac{2}{10}$ .

(0.5 ن) ج- بين أن الحدث $A$ و الحدث $(X = 2)$ غير مستقلين.

(1ن) 2- نكرر التجربة السابقة ثلاث مرات متتابعة، وفي كل مرة نعيد الكرتين المسحوبتين إلى الكيس.
احسب احتمال تحقيق $A$ مرتين على الأقل.

## التمرين الثالث: (3.5نقط)

(1ن) 1- حل في $C$ المعادلة $(E): z^2 + 2z + 1 + i = 0$ .

(0.5 ن)2-احسب $|z'|$ و $|z''|$ ( $z'$ و $z''$ جذرا المعادلة $(E)$ حيث $\mathrm{Im}(z') \succ 0$ ).

(1ن) 3- احسب $z'z''$ واكتب $z'+1$ على الشكل المثلثي.

(1ن) 4- استنتج $Arg(z')$ و $Arg(z'')$ .

## التمرين الرابع: (2.5نقط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ .نعتبر النقط $A(2,0,-2)$ ، $B(-2,1,-1)$ و $C(0,0,-1)$
والفلكة $(S)$ ذات المعادلة : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$ .

(1 ن) 1- احسب $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ واستنتج معادلة ديكالرتية للمستوى $(ABC)$ .

(0.5 ن)2- حدد مركز وشعاع الفلكة $(S)$ .

(1ن) 3- بين أن $(ABC)$ مماس للفلكة $(S)$ و حدد نقطة التماس.

## مسألة: (9نقط)

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $IR$ بما يلي : $f(x)=\begin{cases} x.\sqrt[3]{x+1}, x \geq -1 \\ (1-x^2)e^{\frac{-x^2}{2}}, x \prec -1 \end{cases}$ .

وليكن $C_f$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

## -I

( 0.25 ن) 1- أ- ادرس اتصال $f$ في1-

(0.5 ن) ب- بين أن $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{f(x)}{x+1} = -\infty$ ثم أعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة.

(0.25 ن) ت- بين أن $f$ قابلة للاشتقاق في $-1^-$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

(0.5 ن) ج – احسب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة.

(0.5 ن) د- بين أن $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ ثم أعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة.

(0.5 ن) 2- أ- بين أن $f'(x)=\begin{cases} \frac{4x+3}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}, x \succ -1 \\ x(x^2-3)e^{\frac{-x^2}{2}}, x \prec -1 \end{cases}$ .

(0.5 ن) ب- ضع جدول تغيرات $f$

(0.5 ن) 3- بين أن $f(x) \geq x$ لكل $x$ من المجال $[-1,+\infty[$ .

(0.5 ن ) 4 - أ- اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم $(T)$ مماس $C_f$ في النقطة ذات الأفصول 0 .

(1ن) ب- أنشئ $C_f$ و $(T)$ . (نأخذ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ و $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0.6$ و $e^{\frac{-3}{2}} \approx 0.2$).

## -II

ليكن $h$ قصور الدالة $f$ على المجال $[-1,+\infty[$ .

نعتبر $(U_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة كما يلي: $\begin{cases} U_0 \in [-1,+\infty[, (U_0 \neq 0) \\ U_{n+1} = h(U_n), \forall n \geq 0 \end{cases}$ .

(1ن) 1- بين أن $(U_n)_{n\geq 0}$ تزايدية.

2- نفترض أن $-1 \leq U_0 \prec 0$

(0.5 ن) أ- بين أن $-1 \leq U_n \prec 0$ لكل $n$ من $IN$ .

(0.75 ن) ب- بين أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة و احسب نهايتها.

3- نفترض أن $U_0 \succ 0$ و ليكن $\lambda$ العدد الحقيقي التالي $\lambda = U_0(\sqrt[3]{U_0+1}-1)$ .

(0.75 ن) أ- بين أن $U_{n+1} - U_n \geq \lambda$ لكل $n$ من $IN$ .

(0.75 ن) ب- بين أن $U_n \geq U_0 + n\lambda$ لكل $n$ من $IN$ .

(0.25 ن) ج- استنتج نهاية $(U_n)_{n\geq 0}$ .

SAID BOUZAWIT - lycée Abdelali Benchakroune

# الامتحان التجريبي2004

## التمرين الأول :

1) $x = \ln 4 \Rightarrow t = \sqrt{3}$ و $x = \ln 2 \Rightarrow t = 1$

$t = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow x = \ln(1+t^2)$ ومنه $dx = \dfrac{2t\ dt}{1+t^2}$ إذن : $I = \int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{2dt}{1+t^2} = [2Arctg(t)]_1^{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$ .

2) $J = [xArctg(x)]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}dx$ و $\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}dx = \dfrac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 \Rightarrow J = \dfrac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$

## التمرين الثاني :

1) أ-

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $\dfrac{C_2^2}{C_5^2} = \dfrac{1}{10}$ | $\dfrac{C_2^1 C_2^1}{C_5^2} = \dfrac{2}{10}$ | $\dfrac{C_2^2 + C_2^1 C_1^1}{C_5^2} = \dfrac{3}{10}$ | $\dfrac{C_2^1 C_1^1}{C_5^2} = \dfrac{2}{10}$ |

ب- $p(A) = \dfrac{C_2^2 + C_2^2}{C_5^2} = \dfrac{2}{10}$ .

ج- الحدث $A \cap (X = 2)$ هو " سحب بيدقتين تحملان الرقم 1" ، إذن $p(A \cap (X = 2)) = \dfrac{1}{10}$ .

و لدينا $p(A)p(X = 2) = \dfrac{3}{50}$ ، إذن الحدثان $(X = 2)$ و$A$ غير مستقلين$\left(\dfrac{1}{10} \neq \dfrac{3}{50}\right)$

2) لدينا $p = C_3^2 [p(A)]^2 [1 - p(A)] + C_3^3 [p(A)]^3$ إذن $p = \dfrac{13}{125}$ .

## التمرين الثالث :

1) $\Delta = -4i = 2(1-i)^2 \Rightarrow z' = -1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ و $z'' = -1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ .

2) $|z''| = \sqrt{\left(-1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$|z'| = \sqrt{\left(-1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ .

3) $z'z'' = 1 + i$ (جداء جذري $az^2 + bz + c$ يساوي $\dfrac{c}{a}$) و $z' + 1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \left[1, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ .

4) لدينا $z' + 1 = Cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + iSin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow z' = -1 + Cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + iSin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

إذن $z'=-2Sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+2iSin\left(\frac{3\pi}{8}\right)Cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ ( $Sin\alpha=2Sin\frac{\alpha}{2}Cos\frac{\alpha}{2}$ و $Cos\alpha=1-2Sin^2\frac{\alpha}{2}$ )

يعني $z'=2Sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\left(-Sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)+iCos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$ و منه $\boxed{Arg(z')=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}=\frac{7\pi}{8}}$

من جهة أخرى ، $z'z''=1+i \Leftarrow Arg(z'z'')=\frac{\pi}{4}$

يعني $Arg(z')+Arg(z'')=\frac{\pi}{4}$ إذن $\boxed{Arg(z'')=-\frac{5\pi}{8}}$ .

## التمرين الرابع:

1) $\overrightarrow{AC}(-2,0,1)$ و $\overrightarrow{AB}(-4,1,1) \Leftarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ .

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على $(ABC)$ إذن $(ABC):x+2y+2z+d=0$

$C\in(ABC)\Leftarrow d=2$ و بالتالي $(ABC):x+2y+2z+2=0$ .

2) لدينا $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$ إذن $r=3$ و $\Omega(1,1,2)$ .

3) $d(\Omega,(ABC))=\frac{|1+2+4+2|}{\sqrt{9}}=3=r \Leftarrow (ABC)$ مماس للفلكة $(S)$ .

$H(a,b,c)$ نقطة التماس هي المسقط العمودي للنقطة $\Omega(1,1,2)$ على $(ABC)$ ، إذن :

$$\exists t\in IR \;/\; \begin{cases} a=1+t \\ b=1+2t \\ c=2+2t \\ a+2b+2c+2=0 \end{cases} \Leftarrow t=-1 \Leftarrow H(0,-1,0) .$$

## مسألة :

-I

1) أ- $f(-1)=0$ و $\lim_{-1^-}f(x)=\lim_{-1^+}f(x)=0$ إذن $f$ متصلة في 1- .

ب- $\lim_{-1^+}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{-1^+}\frac{x\sqrt[3]{x+1}}{x+1}=\lim_{-1^+}x\sqrt[3]{\frac{1}{(x+1)^2}}=-\infty$ ، إذن $f$ غير قابلة للاشتقاق في $-1^+$

$C_f$ يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(-1,0)$ على اليمين .

ث- $\lim_{-1^-}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{-1^-}\frac{(1-x^2)e^{\frac{-x^2}{2}}}{x+1}=\lim_{-1^-}(1-x)e^{\frac{-x^2}{2}}=2e^{\frac{-1}{2}}$ ، إذن $f$ قابلة للاشتقاق في $-1^-$

$C_f$ يقبل نصف مماس معامله الموجه $2e^{\frac{-1}{2}}$ في النقطة $A(-1,0)$ على اليسار.

ج- $\lim_{+\infty}f(x)=\lim_{+\infty}x\sqrt[3]{x+1}=+\infty$ و $\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{+\infty}\sqrt[3]{x+1}=+\infty$

$C_f$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراثيب بجوار $+\infty$ .

د- $\lim_{-\infty}f(x)=\lim_{-\infty}(1-x^2)e^{\frac{-x^2}{2}}=\lim_{-\infty}e^{\frac{-x^2}{2}}+2.\frac{-x^2}{2}e^{\frac{-x^2}{2}}=0$ ( ضع $t=\frac{-x^2}{2}$ )

$C_f$ يقبل محور الأفاصيل كمستقيم مقارب بجوار $-\infty$ .

2) أ- إذا كان $x \succ -1$ : $f'(x)=\sqrt[3]{x+1}+\frac{x}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \Leftarrow f'(x)=\sqrt[3]{x+1}+x\left[\frac{1}{3}(x+1)^{\frac{-2}{3}}\right]$ .

يعني $f'(x)=\frac{4x+3}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$ .

إذا كان $x \prec -1$ : $f'(x)=x(x^2-3)e^{\frac{-x^2}{2}} \Leftarrow f'(x)=-2xe^{\frac{-x^2}{2}}+(1-x^2)\left(-xe^{\frac{-x^2}{2}}\right)$ .

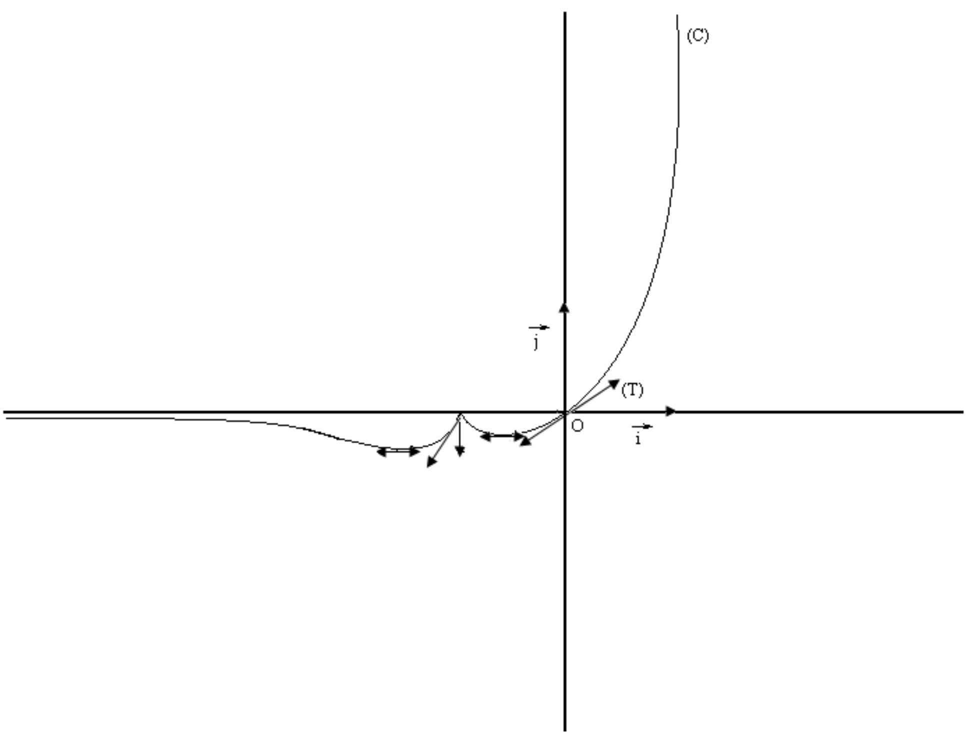
ب-

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $\frac{-3}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | -- | 0 | + | ‖ | -- | 0 | + | |
| $f'(x)$ | 0 | ↘ | $-2e^{\frac{-3}{2}}$ | ↗ | 0 | ↘ | $\frac{-3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ | ↗ | $+\infty$ |

3) لكل $x$ من $[-1,+\infty[$ لدينا $f(x)-x=x(\sqrt[3]{x+1}-1)=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}\geq 0$ .

4) أ- $(T): y=f'(0)x+f(0)$ يعني $(T): y=x$

ب- المنحنى :



-II

1) لدينا $U_0 \in [-1,+\infty[$ . نفترض أن $U_n \in [-1,+\infty[$ إذن $h(U_n) \in h([-1,+\infty[) = \left[-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}},+\infty\right[$

يعني $U_{n+1} \in [-1,+\infty[$ ، وبالتالي $\boxed{\forall n \geq 0 \ U_n \in [-1,+\infty[}$

حسب السؤال 3 من الجزء الأول ، وبوضع $x = U_n$ نجد $U_{n+1} = h(U_n) \geq U_n$ . إذن $(U_n)$ تزايدية.

2) أ- من أجل $n = 0$ : $-1 \leq U_0 \prec 0$ ، نفترض أن $-1 \leq U_n \prec 0$ .

لدينا إذن $U_n \in [-1,0[$ يعني $h(U_n) \in h([-1,0[) = \left[-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}},0\right[$ و بالتالي $U_{n+1} \in [-1,0[$ .

إذن $\boxed{\forall n \geq 0 \ U_n \in [-1,0[}$.

ب- $(U_n)$ تزايدية ومكبورة ب0 إذن فهي متقاربة.

نضع $I = [-1,0[$ . $h$ متصلة على $I$ و $h(I) \subset I$ و $(U_n)$ متقاربة، إذن نهايتها $l$ تحقق $h(l) = l$ .

أي $l\left(1-\sqrt[3]{l+1}\right) = 0$ ومنه $\boxed{l = 0}$.

3) أ- لدينا $U_{n+1} - U_n = U_n\left(\sqrt[3]{1+U_n} - 1\right)$ و $U_n \geq U_0$ ($(U_n)$ تزايدية) ، إذن( وبما أن $U_0 \succ 0$ )

نجد $U_{n+1} - U_n \geq U_0\left(\sqrt[3]{1+U_0} - 1\right)$ لكل $n$ من $IN$ .

ب- من أجل $n = 0$ : $U_0 \geq U_0$ ( العلاقة محققة ) . نفترض أن $U_n \geq U_0 + n\lambda$

و لدينا $U_{n+1} \geq U_n + \lambda$ إذن $U_{n+1} \geq U_0 + n\lambda + \lambda$ أي $U_{n+1} \geq U_0 + (n+1)\lambda$.

إذن $U_n \geq U_0 + n\lambda$ لكل $n$ من $IN$ .

ج- لدينا $\lambda \succ 0$ إذن $\lim U_0 + n\lambda = +\infty$ و منه $\boxed{\lim U_{n.} = +\infty}$.

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم العالي
وتكوين الأطر
والبحث العلمي
قطاع التربية الوطنية

| الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين<br>جهة سوس ماسة درعة<br>الثانوية التأهيلية محمد السادس<br>ورزازات | الامتحان التجريبي الموحد في مادة<br>الرياضيات<br>دورة أبريل 2006 | الشعبة : الثانية بكالوريا علوم تجريبية<br>المدة الزمنية : 3 ساعات<br>المعامل : 7 |
|---|---|---|

بسم الله الرحمن الرحيم

## التمرين الأول : 2ن

1. أحسب التكامل التالي : $I=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$ . 1

2. باستعمال المكاملة بالأجزاء ، أحسب التكامل : $J=\int_0^{\ln(2)} xe^x dx$ . 1

## التمرين الثاني : 3.5 ن

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E):\ z^2+\left[2+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right]z+1+\sqrt{3}+i\left(1-\sqrt{3}\right)=0$ .

1. تحقق أن $z_1=-1-i$ حل للمعادلة $(E)$ واستنتج الحل الآخر $z_2$ للمعادلة $(E)$ . 1

2. أكتب $z_1$ و $z_2$ على شكليهما المثلثي . 1

3. نضع $Z=\frac{z_1}{z_2}$ . أكتب $Z$ على الشكل الجبري والمثلثي واستنتج قيمتي $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$. 1.5

## التمرين الثالث : 4.5 ن

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(3,0,1)$ والمستويين : $(P):\ x+y+z-1=0$ و $(Q):\ 2x+y+2z+3=0$ .

1. أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم المار من النقطة $A$ والعمودي على المستوى $(Q)$ . 1

2. بين أن المستويين $(P)$ و $(Q)$ متقاطعين وفق مستقيم $(D)$ ثم حدد تمثيلا بارامتريا له . 1

3. حدد معادلة ديكارتية للمستوى $(R)$ المار من النقطة $B$ والعمودي على المستويين $(P)$ و $(Q)$ . 1

4. لتكن $(S)$ فلكة مركزها $\Omega(1,1,3)$ وشعاعها $R=3$ .

أ- أعط معادلة ديكارتية للفلكة $(S)$ . 0.5

ب- بين أن المستوى $(P)$ يقطع الفلكة $(S)$ وفق دائرة محددا مركزها وشعاعها. 1

## التمرين الرابع:

10 ن

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x+\ln(3-x) & ; \quad x\leq 2 \\ f(x)=x+\sqrt{x^2-2x} & ; \quad x>2 \end{cases}$$

و نعتبر $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة العددية $f$ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ . 0.5

ب- أدرس اتصال الدالة $f$ في النقطة 2 . 1

2. أ- بين أن : $f'_g(2)=0$ وأن : $\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=+\infty$ . 1

ب- أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين السابقتين . 0.5

3. بين أن $f$ تزايدية قطعا على كل من المجالين $]2,+\infty[$ و $]-\infty,2[$ . 1.5

4. بين أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقاربا مائلا بجوار $+\infty$ معادلته $y=2x-1$ ، وأن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ اتجاه مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$ . 1

5. أنشئ $(\mathscr{C}_f)$ . 1.5

6. ليكن $g$ قصور الدالة $f$ على المجال $[2,+\infty[$ .

أ- بين أن $g$ تقابل من المجال $[2,+\infty[$ نحو مجال $J$ يجب تحديده . 0.5

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل $x$ من المجال $J$ . 0.5

7. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=u_n+\ln(3-u_n) & ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad 0<u_n\leq 2$ . 0.5

ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية . 0.5

جـ- استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثم أحسب نهايتها. 1

بالتوفيق إن شاء الله

## التمرين الأول :

1. لدينا : $I=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

$$I = 1-[Arc\tan x]_0^1 = 1-\frac{\pi}{4}$$

وبالتالي فإن : $\boxed{I=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx = 1-\frac{\pi}{4}}$ .

2. نضع : $\begin{cases}u'(x)=e^x\\ v(x)=x\end{cases}$ . إذن : $\begin{cases}u(x)=e^x\\ v'(x)=1\end{cases}$ .

لدينا $u$ و $v$ دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $[0,\ln 2]$؛ و $u'$ و $v'$ دالتين متصلتين على المجال $[0,\ln 2]$ . حسب المكاملة بالأجزاء ؛ لدينا :

$$J=\int_0^{\ln 2}u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2}u(x)v'(x)dx = [xe^x]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2}e^x dx$$

$$J=\ln(2)e^{\ln(2)} - 0 - [e^x]_0^{\ln 2} = 2\ln(2) - (e^{\ln(2)}-1) = 2\ln(2)-1$$

وبالتالي فإن : $\boxed{J=\int_0^{\ln 2}xe^xdx = 2\ln(2)-1}$ .

## التمرين الثاني :

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ ؛ المعادلة :

$$(E)\;:\; z^2+[2+i(1-\sqrt3)]z+1+\sqrt3+i(1-\sqrt3)=0$$

1. لدينا : $(-1-i)^2+[2+i(1-\sqrt3)](-1-i)+1+\sqrt3+i(1-\sqrt3)$

$$=2i-2-2i-i(1-\sqrt3)+1-\sqrt3+1+\sqrt3+i(1-\sqrt3)=0$$

إذن : $z_1=\boxed{-1-i}$ حل للمعادلة $(E)$ . ليكن $z_2$ الحل الآخر للمعادلة $(E)$.

نعلم أن : $z_1+z_2=-\frac{b}{a}=-\frac{2+i(1-\sqrt3)}{1}=-2-i(1-\sqrt3)$ .

إذن : $z_2=-2-i(1-\sqrt3)-z_1=-2-i(1-\sqrt3)+1+i=\boxed{-1+i\sqrt3}$

2. لدينا : $|z_1|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt2$ ؛ إذن :

$$z_1=\sqrt2\left(-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}\right)=\left[\sqrt2,\frac{\pi}{4}+\pi\right]=\left[\sqrt2,\frac{5\pi}{4}\right]$$

ولدينا : $|z_2|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt3)^2}=2$ ؛ إذن :

$$z_2=2\left(-\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}\right)=\left[2,\pi-\frac{\pi}{3}\right]=\left[2,\frac{2\pi}{3}\right]$$

3. الشكل المثلثي ل $Z$ هو: $Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\left[\sqrt2,\frac{5\pi}{4}\right]}{\left[2,\frac{2\pi}{3}\right]}=\left[\frac{\sqrt2}{2},\frac{5\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right]=\left[\frac{\sqrt2}{2},\frac{7\pi}{12}\right]$

والشكل الجبري ل $Z$ هو :

$$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{-1-i}{-1+i\sqrt3}=\frac{(-1-i)(-1-i\sqrt3)}{(-1+i\sqrt3)(-1-i\sqrt3)}=\frac{1-\sqrt3}{4}+i\frac{1+\sqrt3}{4}$$

ومنه نستنتج أن : $\begin{cases}\frac{\sqrt2}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt3}{4}\\ \frac{\sqrt2}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt3}{4}\end{cases}$ ؛ إذن : $\begin{cases}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt2-\sqrt6}{4}\\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt2+\sqrt6}{4}\end{cases}$ .

## التمرين الثالث :

في الفضاء $(\mathcal{E})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec i,\vec j,\vec k)$ ؛ نعتبر :

النقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(3,0,1)$ ؛

والمستويين : $(P):\; x+y+z-1=0$ و $(Q):\; 2x+y+2z+3=0$ .

1. ليكن $(\Delta)$ المستقيم المار من النقطة $A$ والعمودي على المستوى $(Q)$ .

لدينا : $\vec u(2,1,2)$ متجهة منظمية على المستوى $(Q)$ ولدينا $(\Delta)\perp(Q)$ ؛ إذن :

$\vec{u}$ متجهة موجهة للمستقيم $(\Delta)$ . لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء $(\mathscr{E})$ ؛

لدينا : $M\in(\Delta) \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان

$$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{AM}=t\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 &= 2t \\ y+1 &= t \\ z-0 &= 2t \end{cases} \ / \ t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2+2t \\ y &= -1+t \\ z &= 2t \end{cases} \ / \ t\in\mathbb{R}$$

هذه النظمة هي تمثيل بارامتري للمستقيم $(\Delta)$.

2. لدينا $\vec{u}(2,1,2)$ متجهة منظمية على المستوى $(Q)$ و $\vec{v}(1,1,1)$ متجهة منظمية على المستوى $(P)$ ؛ ولدينا :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=-\vec{i}+\vec{k}\neq\vec{0}$$

إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان غير مستقيميتان ؛ ومنه فإن المستويين $(P)$ و $(Q)$ متقاطعان وفق مستقيم $(D)$ موجه بالمتجهة $\vec{u}\wedge\vec{v}=(-1,0,1)$ ؛ معادلتين ديكارتيتين له هما :

$$\begin{cases} x+y+z-1 &= 0 \\ 2x+y+2z+3 &= 0 \end{cases}.$$

من أجل $z=1$ ( مثلا ) ؛ نجد : $\begin{cases} x+y &= 0 \\ 2x+y+5 &= 0 \end{cases}$ . إذن :

$\begin{cases} y &= -x \\ 2x-x+5 &= 0 \end{cases}$ ؛ ومنه فإن : $\begin{cases} y &= 5 \\ x &= -5 \end{cases}$ ؛

وبالتالي فإن النقطة $C(-5,5,1)$ تنتمي إلى المستقيم $(D)$ .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء $(\mathscr{E})$ ؛ لدينا :

$M\in(D) \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CM}$ و $\vec{u}\wedge\vec{v}$ مستقيميتان

$$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{CM}=t\,\vec{u}\wedge\vec{v}$$

$$M\in(D) \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 &= -t \\ y-5 &= 0 \\ z-1 &= t \end{cases} \ / \ t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= -5-t \\ y &= 5 \\ z &= 1+t \end{cases} \ / \ t\in\mathbb{R}$$

هذه النظمة هي تمثيل بارامتري للمستقيم $(D)$؛

( $(D)$ هو تقاطع المستويين $(P)$ و $(Q)$ )

3. ليكن $(R)$ المستوى المار من النقطة $B$ والعمودي على المستويين $(P)$ و $(Q)$

إذن $(R)$ عمودي على المستقيم $(D)$ ؛ وبما أن $\vec{u}\wedge\vec{v}=(-1,0,1)$ متجهة موجهة للمستقيم $(D)$ ؛ فإنها متجهة منظمية على المستوى $(R)$ .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء $(\mathscr{E})$ . لدينا :

$$\begin{aligned} M\in(R) &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\vec{u}\wedge\vec{v}=0 \\ &\Leftrightarrow -(x-3)+(z-1)=0 \\ &\Leftrightarrow -x+z+2=0 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن معادلة ديكارتية للمستوى $(R)$ هي : $\boxed{-x+z+2=0}$ .

4. لتكن $(S)$ الفلكة التي مركزها $\Omega(1,1,3)$ وشعاعها $R=3$ .

أ- لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء $(\mathscr{E})$ . لدينا :

$$\begin{aligned} M\in(S) &\Leftrightarrow \Omega M=R \\ &\Leftrightarrow \Omega M^2=R^2 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+2=0 \end{aligned}$$

ب- لدينا : $d(\Omega,(P))=\dfrac{|1+1+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}<R$ ؛ إذن :

المستوى $(P)$ يقطع الفلكة $(S)$ وفق الدائرة $\mathscr{C}(\omega,r)$ التي :

شعاعها : $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{9-\frac{16}{3}}=\sqrt{\frac{11}{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{33}}{3}}$ .

مركزها $\omega(x,y,z)$ هو المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستوى $(P)$:

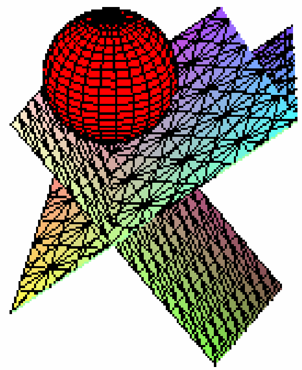
لدينا $\overrightarrow{AB}(1,1,1)$ متجهة منظمية على المستوى $(P)$؛ $\ll \overrightarrow{AB}\perp(P)\gg$

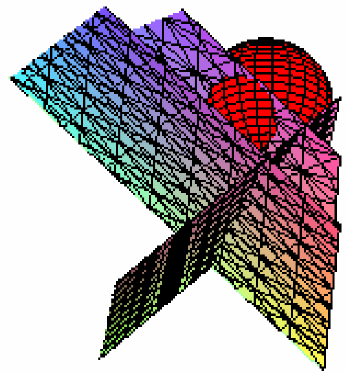
و $A(2,-1,0)\in(P)$ ؛ إذن $\omega=A$ هو مركز الدائرة $\mathscr{C}(\omega,r)$ .

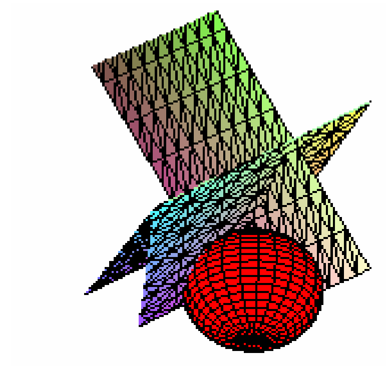
وبالتالي فإن : $(S)\cap(P)=\mathscr{C}\left(A,\frac{\sqrt{33}}{3}\right)$ حيث : $A(2,-1,0)$ .

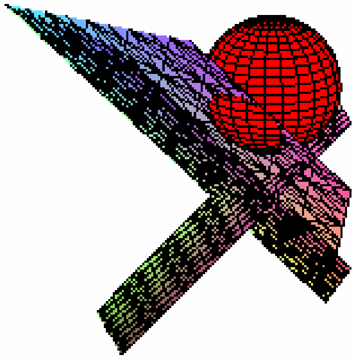
نعطي الشكل النهائي بواسطة البرنامين Maple و winplot كما يلي :

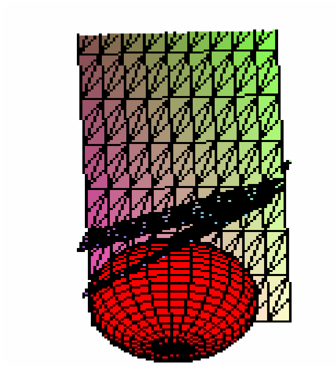
```
with(geometry) :
with(geom3d) :
plane(P,x+y+z=1,[x,y,z]) :
plane(Q,2*x+y+2*z=-3,[x,y,z]) :
plane(R,-x+z=-2,[x,y,z]) :
line(D,[P,Q]) :
_EnvXName :=x :     _EnvYName :=y :     _EnvZName :=z :
sphere(S,(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9,[x,y,z]) ;
intersection(D,P,Q) ;
ArePerpendicular(P,R) ;     ArePerpendicular(Q,R) ;
draw([P,Q,R ,D,S(color=red)]);
```

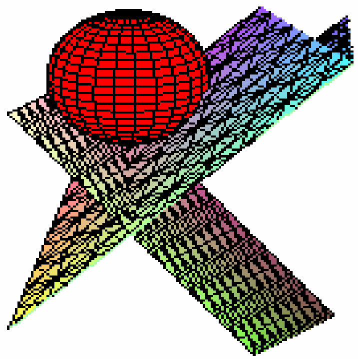


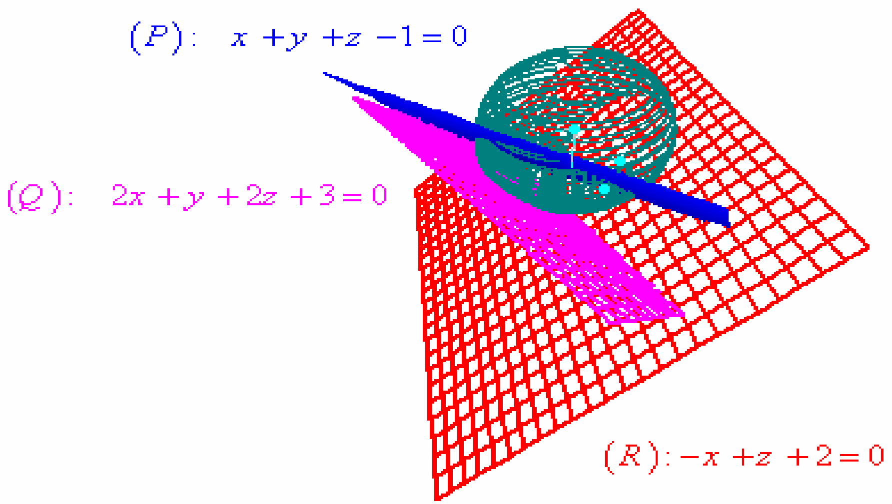


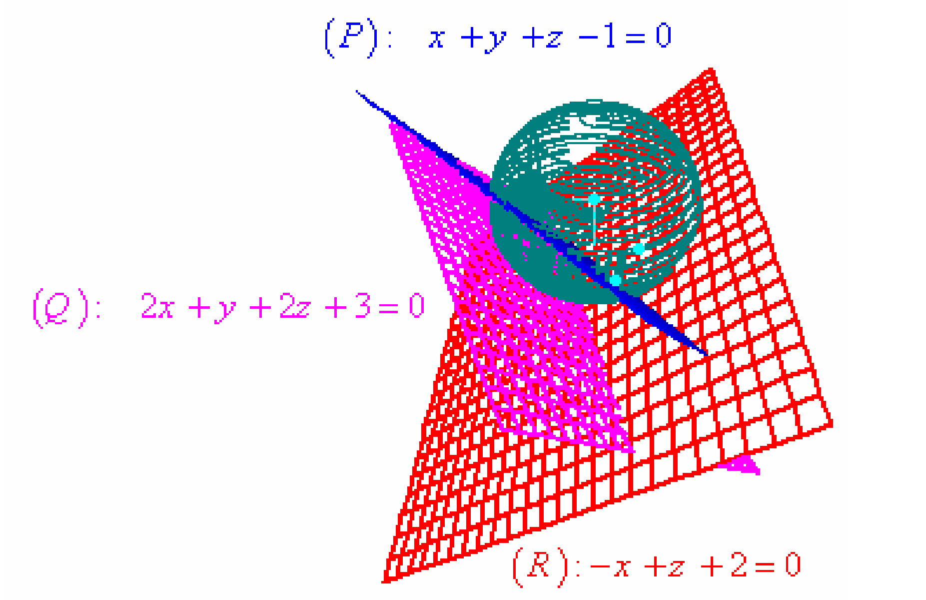













## التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x+\ln(3-x) & ; \quad x\le 2 \\ f(x)=x+\sqrt{x^2-2x} & ; \quad x>2 \end{cases}$$

1. أ- لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+\ln(3-x)=\lim\limits_{t\to+\infty} 3-t+\ln(t)=\lim\limits_{t\to+\infty} 3-t\left(1-\frac{\ln(t)}{t}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\boxed{-\infty}$

حيث : $t=3-x$ ؛ ولدينا : $x\to-\infty \Leftrightarrow t\to+\infty$ .

ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+|x|\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty} x+x\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\boxed{+\infty}$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+} x+\sqrt{x^2-2x}=2$

و $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-} x+\ln(3-x)=2+\ln(1)=2$ و $f(2)=2$ .

بما أن : $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=f(2)$ ؛ فإن $f$ متصلة في النقطة 2.

2. أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x+\ln(3-x)-2}{x-2}$ .

نضع $t=3-x$ . إذن : $x\to2^-\Leftrightarrow t\to1^+$ و منه فإن :

$\lim\limits_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{t\to1^+}\frac{1-t+\ln(t)}{1-t}=\lim\limits_{t\to1^+}1+\frac{\ln(t)}{1-t}1-1=\boxed{0}$ .

إذن $f$ قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة 2 ولدينا : $\boxed{f_g'(2)=0}$ .

لدينا : $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x+\sqrt{x^2-2x}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}1+\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}1+\frac{x^2-2x}{(x-2)\sqrt{x^2-2x}}=\lim\limits_{x\to2^+}1+\frac{x}{\sqrt{x^2-2x}}=\boxed{+\infty}$ .

إذن $f$ غير قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة 2 .

ب- لدينا : $f$ قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة 2 و $f_g'(2)=0$ . إذن $\mathscr{C}_f$ يقبل نصف مماس على اليسار في النقطة التي أفصولها 2 معادلته :

$\begin{cases} y=f_g'(2)(x-2)+f(2) \\ x\le 2\end{cases}$ أي $\boxed{\begin{cases} y=2 \\ x\le 2\end{cases}}$ $(T_g)$ . ( $f(2)=2$ و $f_g'(2)=0$ )

لدينا : $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=+\infty$ . إذن $\mathscr{C}_f$ يقبل نصف مماس رأسي ؛ موجه نحو الأعلى؛ على اليمين في النقطة التي أفصولها 2 .

3. ليكن $x\in]2,+\infty[$ . لدينا :

$$f'(x)=\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)'=1+\frac{(x^2-2x)'}{2\sqrt{x^2-2x}}=1+\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}>0$$

إذن $f$ تزايدية قطعا على المجال $]2,+\infty[$ .

ليكن $x\in]-\infty,2[$ . لدينا :

$$f'(x)=\left(x+\ln(3-x)\right)'=1+\frac{(3-x)'}{3-x}=1-\frac{1}{3-x}=\frac{2-x}{3-x}>0$$

إذن $f$ تزايدية قطعا على المجال $]-\infty,2[$ .

ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ كما يلي :

| $x$ | $-\infty$ 2 $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ 0 ‖ $+\infty$ $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ |

4. لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2-2x}-2x+1=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x}-x+1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x}+x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-x^2+2x+1}{\sqrt{x^2-2x}+x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}+x-1}=0$$

إذن $\mathcal{C}_f$ يقبل مقاربا مائلا ؛ بجوار $+\infty$ ؛ معادلته : $\boxed{y=2x-1}$ .

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و بوضع $t=3-x$ ؛ نجد $x\to-\infty\Leftrightarrow t\to+\infty$ و

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\ln(3-x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}1+\frac{\ln(3-x)}{x}=\lim_{t\to+\infty}1+\frac{\ln(t)}{3-t}=\lim_{t\to+\infty}1+\frac{\ln(t)}{t}\times\frac{1}{\frac{3}{t}-1}=1$$

ولدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\ln(3-x)=\lim_{t\to+\infty}\ln(t)=\boxed{+\infty}$ ؛ حيث $t=3-x$ .

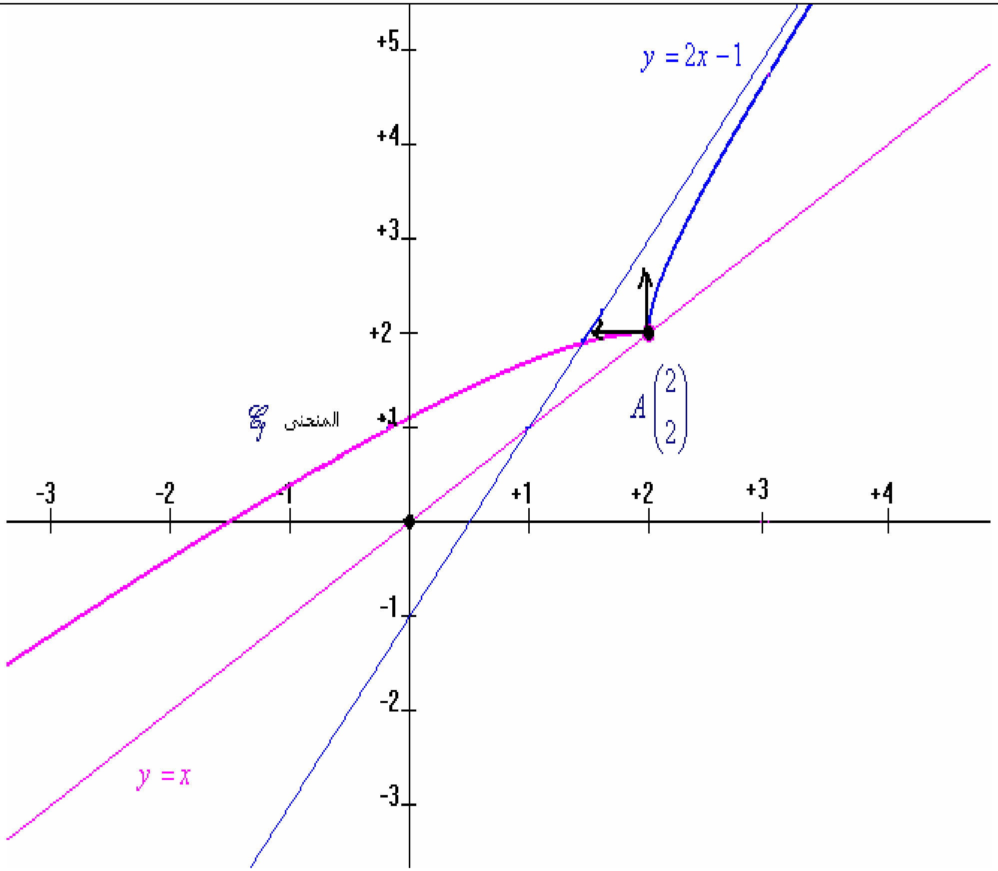
إذن $\mathcal{C}_f$ يقبل فرعا شلجميا ؛ بجوار $-\infty$ ؛ اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=x}$.

5. إنشاء المنحنى $\mathcal{C}_f$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ :

ننشئ الفرعين اللانهائيين للمنحنى $\mathcal{C}_f$ .

ننشئ نصفي مماس للمنحنى $\mathcal{C}_f$ في النقطة ذات الأفصول2.

نحسب بعض الصور عند الاقتضاء .




6. ليكن $g$ قصور الدالة $f$ على المجال $[2,+\infty[$ .

أ- لدينا $g$ متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[2,+\infty[$ . إذن $g$ تقابل من المجال $[2,+\infty[$ نحو المجال $J=g\left([2,+\infty[\right)=\left[g(2),\lim_{x\to+\infty}g(x)\right[=[2,+\infty[$ .

ب- لدينا :

$$\begin{array}{rccc} g^{-1} : & [2,+\infty[ & \to & [2,+\infty[ \\ & x & \mapsto & y=g^{-1}(x)? \end{array}$$ .

ليكن $x\in[2,+\infty[$ و $y\in[2,+\infty[$ بحيث : $y=g^{-1}(x)$ ينبغي تحديده ؟

لدينا :

$$\begin{aligned} y=g^{-1}(x) &\Leftrightarrow x=g(y)\\ &\Leftrightarrow x=y+\sqrt{y^2-2y}\\ &\Leftrightarrow x-y=\sqrt{y^2-2y}\end{aligned}$$

$$y = g^{-1}(x) \Rightarrow (x-y)^2 = y^2 - 2y$$
$$\Rightarrow x^2 - 2xy + \cancel{y^2} = \cancel{y^2} - 2y$$
$$\Rightarrow x^2 = 2xy - 2y$$
$$\Rightarrow x^2 = (2x-2)y$$
$$\Rightarrow y = \frac{x^2}{2(x-1)}$$

وبالتالي فإن :

$$\begin{array}{rccc} g^{-1} : & [2,+\infty[ & \to & [2,+\infty[ \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2}{2(x-1)} \end{array}$$

7. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \ln(3-u_n) = f(u_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- من أجل $n=0$ ؛ لدينا : $u_0 = 1$ . إذن : $0 < u_0 \le 2$ .

ليكن $n \in \mathbb{N}$ . ☜ نفترض أن : $0 < u_n \le 2$ .

☜ نبين أن : $0 < u_{n+1} \le 2$ .

لدينا $f$ تزايدية قطعا على المجال $]0,2]$ ؛ إذن :

$$0 < u_n \le 2 \Rightarrow f(0) < f(u_n) \le f(2) \Rightarrow 0 < \ln(2) < u_{n+1} \le 2 \Rightarrow 0 < u_{n+1} \le 2$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ : \ 0 < u_n \le 2}$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$ . لدينا : $u_{n+1} - u_n = \ln(3-u_n)$ . وبما أن :

$0 < u_n \le 2 \Rightarrow -2 \le -u_n < 0 \Rightarrow 1 \le 3 - u_n < 3$ ؛ فإن: $u_{n+1} - u_n = \ln(3-u_n) \ge 0$

ومنه فإن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية .

جـ- لدينا $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية ومكبورة بالعدد 2 . إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة .

ولدينا : ☜ $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ u_n \in ]0,2]$ .

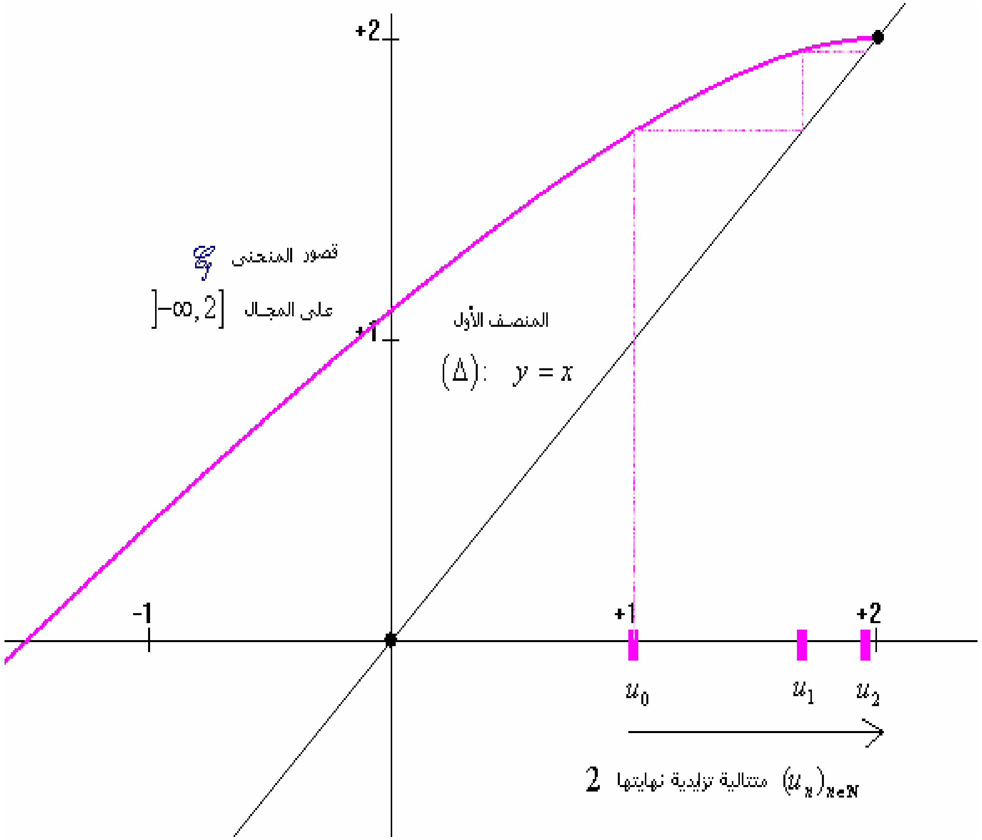
☜ $f$ دالة متصلة على المجال $]0,2]$.

☜ $f(]0,2]) = ]\ln(2),2] \subset ]0,2]$ : $]0,2]$ مستقر بالدالة $f$ .

☜ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها $l$

إذن : $\boxed{l=2} \Leftrightarrow 3-l=1 \Leftrightarrow \ln(3-l)=0 \Leftrightarrow l = l+\ln(3-l) \Leftrightarrow f(l)=l$ .

وبالتالي فإن : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$ .




بالتوفيق إنشاء الله

R

| ثانوية دمنات التأهيلية<br>دمنات - أزيلال<br>امتحان البكالوريا<br>الامتحان التجريبي الموحد<br>دورة أبريل 2007 | مادة : الرياضيات<br><br>مدة الإنجاز : 3 ساعات | المستوى : الثانية من سلك البكالوريا<br>الشعبة : العلوم التجريبية | الموضوع<br>1/2 |
|---|---|---|---|

سلم التنقيط

**يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير المبرمجة**

**التمرين الأول:** ( 2.5 ن)

نعتبر في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,-1,1)$ والمستوى $(P)$ الذي معادلته $x+y-z-2=0$ .

1- حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم $(D)$ المار من النقطة $A$ و العمودي على المستوى $(P)$ . — 0.25

2- حدد إحداثيات $B$ نقطة تقاطع المستقيم $(D)$ و المستوى $(P)$ . — 0.5

3- نعتبر الفلكة $(S)$ التي مركزها $A$ و شعاعها $r=\sqrt{7}$ .

أ- أعط معادلة ديكارتية للفلكة $(S)$ . — 0.25

ب- بين أن المستوى $(P)$ يقطع الفلكة $(S)$ وفق دائرة $(C)$ محددا مركزها و شعاعها. — 0.5

4- حدد معادلتي المستويين الموازيين للمستوى $(P)$ و المماسين للفلكة $(S)$ . — 1

**التمرين الثاني:** (3.5 ن)

نعتبر في $C$ الحدودية $P(z)$ حيث : $P(z)=z^3-2(2+3i)z^2-4(1-5i)z+16(1-i)$

1- أ- تحقق أن $z_0=2$ جذر للحدودية $P$. — 0.25

ب- حدد العددين العقديين $a$ و $b$ بحيث : $P(z)=(z-z_0)(z^2+az+b)$ — 0.5

ج- حل في $C$ المعادلة: $(E)\ :\ \ P(z)=0$ . — 1

2- ليكن $z_1$ و $z_2$ الحلين الآخرين للمعادلة $(E)$ حيث $\Re e(z_2)=0$ . — 1

بين أن حلول المعادلة $(E)$ هي حدود متتابعة من متتالية هندسية حدها الأول $u_0=z_0$ ثم حدد أساسها $q$ والحد $u_{16}$ .

3- أ- مثل في المستوى العقدي النقط $A(2)$ و $B(2+2i)$ و $C(4i)$ . — 0.25

ب- حدد لحق النقطة $G$ مرجح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,1)$ . — 0.5

**التمرين الثالث :** (3.5 ن)

من أجل $n\in IN^*$ نضع $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$.

1- باستعمال مكاملة بالأجزاء احسب $I_1$ . — 0.5

2-أ- بين أن لكل $n$ من $IN^*-\{1\}$ $\quad I_n=nI_{n-1}-\dfrac{1}{e}$. — 0.5

ب- احسب $I_2$ و $I_3$ . — 0.5

ج- احسب التكامل $\int_0^1(2x^3-4x^2)e^{-x}dx$ . — 0.5

3- أ- بين أن المتتالية $(I_n)_{n\in IN^*}$ تناقصية و مصغورة بالعدد 0 . — 0.75

ب- استنتج أن $(I_n)_{n\in IN^*}$ متقاربة. — 0.25

ج- بين أن لكل $n$ من $IN^*$ $\quad \dfrac{1}{n+1}\leq I_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ . — 0.5

**مسألة:** (10.5 ن)

الجزء الأول:

لتكن $g$ الدالة العددية المعرفة بما يلي : $g(x)=x+1-\ln(x)$ .

1- احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ . — 0.75

-2 احسب $g'(x)$ لكل $x$ من $IR^{*+}$ ثم أعط جدول تغيرات $g$ . 0.5

-3 استنتج أن لكل $x$ من $IR^{*+}$ $g(x)>0$ . 0.25

**<u>الجزء الثاني:</u>**

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)}, x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

و ليكن $(c_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم.

-1 ادرس اتصال الدالة $f$ على اليمين في النقطة 0 و احسب $\lim\limits_{x->+\infty} f(x)$ . 0.5

-2أ- تحقق أن: $\frac{f(x)}{x}=e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$ لكل $x$ من المجال $]0,+\infty[$ . 0.5

ب- ادرس اشتقاق الدالة $f$ على اليمين في النقطة 0 ثم أول النتيجة هندسيا. 0.5

ج- احسب النهاية $\lim\limits_{x->+\infty}\frac{f(x)}{x}$ . 0.25

د- بين أن $\lim\limits_{x->+\infty}\frac{f(x)-x}{\ln(x)}=1$ ( يمكنك استعمال النتيجة $\lim\limits_{t->0}\frac{e^t-1}{t}=1$ ) 1.5

استنتج أن $\lim\limits_{x->+\infty} f(x)-x=+\infty$ ثم حدد الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة $f$ .

-3 احسب $f'(x)$ لكل $x$ من المجال $]0,+\infty[$ ثم ادرس إشارتها و أعط جدول تغيرات الدالة $f$ . 1

-4أ- احسب $f(1)$ و $f(2)$ و $f(3)$ . 0.25

ب- أنشئ المنحنى $(c_f)$ . 1

(نعطي $3^{\frac{4}{3}}\approx 4,3$ و نقبل أن للمنحنى $(c_f)$ نقطة انعطاف في النقط $A(1,1)$ ).

-5أ- احسب $A(\lambda)$ مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة $g$ و محور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=1$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda>1$ . 1

ب- احسب $\lim\limits_{\lambda->+\infty} \mathrm{A}(\lambda)$ . 1

**<u>الجزء الثالث:</u>**

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=g(u_n), n\in IN \end{cases}$$

-1 بين أن $1\le u_n<e$ $\forall n\in IN$ . 0.5

-2 بين أن $(u_n)$ تزايدية . 0.5

-3 استنتج أن $(u_n)$ متقاربة واحسب $\lim\limits_{n->+\infty} u_n$ . 0.5

و الله ولي التوفيق

**<u>ملاحظة:</u>** يراعى في التصحيح سلامة التعبير و حسن التقديم

**حظ سعيد للجميع**

envoyé : le Prof. Said Dahani

**التمرين الأول:**

1- تمثيل بارا متري للمستقيم $(D)$ : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \quad (t \in IR) \\ z = 1-t \end{cases}$

2- لتحديد احداثيات النقطة $B$ نحل النظمة: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \\ z = 1-t \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$

ومنه $(1+t)+(-1+t)-(1-t)-2=0$

أي $t=1$ وبالتالي احداثيات نقطة التقاطع هي $B(2,0,0)$ .

3- أ معادلة ديكارتية للفلكة $(S)$ هي :

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=(\sqrt{7})^2$$

أي $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-4=0$

3- ب لدينا $d(A,(P))=\dfrac{|1-1-1-2|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}<\sqrt{7}$

ومنه المستوى $(P)$ يقطع الفلكة $(S)$ وفق دائرة

<u>مركزها</u>: هو المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوى $(P)$ أي تقاطع المستقيم $(D)$ والمستوى $(P)$ أي النقطة $B$ .

<u>شعاعها</u>: $r'=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{7-3}=2$ .

4 - معادلة ديكارتية لمستوى $(Q)$ موازي للمستوى $(P)$ تكتب على شكل $x+y-z+d=0$ .

المستوى $(Q)$ مماس للفلكة $(S)$ يكافئ $d(A,(Q))=2$

ولدينا : $d(A,(Q))=2 \Leftrightarrow \dfrac{|1-1-1+d|}{\sqrt{3}}=\sqrt{7}$

$$\Leftrightarrow \frac{|-1+d|}{\sqrt{3}}=\sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow |-1+d|=\sqrt{21}$$

$\Leftrightarrow -1+d=\sqrt{21}$ أو $-1+d=-\sqrt{21}$

$\Leftrightarrow d=1+\sqrt{21}$ أو $d=1-\sqrt{21}$

و منه معادلتي المستويين الموازيين للمستوى $(P)$ والمماسين للفلكة $(S)$ هما : $x+y-z+1+\sqrt{21}=0$

و $x+y-z+1-\sqrt{21}=0$

**التمرين الثاني :**

لدينا : $P(z)=z^3-2(2+3i)z^2-4(1-5i)z+16(1-i)$

1- أ- لدينا $P(2)=2^3-2(2+3i)2^2-4(1-5i)2+16(1-i)$

$=8-8(2+3i)-8(1-5i)+16(1-i)$

$=8(1-2-3i-1+5i+2-2i)$

$=0$

ومنه $z_0=2$ جذر للحدودية $P$ .

1- ب لدينا : $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$

$=z^3+(a-2)z^2+(b-2a)z-2b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2=-2(2+3i) \\ b-2a=-4(1-5i) \\ -2b=16(1-i) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2-2(2+3i)=-2(1+3i) \\ b=-8(1-i) \end{cases}$$

وبالتالي : $P(z)=(z-2)(z^2-2(1+3i)z-8(1-i))$

1- ج لدينا :

$P(z)=0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2-2(1+3i)z-8(1-i))=0$

$\Leftrightarrow z-2=0$ أو $z^2-2(1+3i)z-8(1-i)=0$

$\Leftrightarrow z=2$ أو $z^2-2(1+3i)z-8(1-i)=0 \quad (*)$

لنحل المعادلة $(*)$ :

لدينا : $\Delta'=b'^2-ac=(1+3i)^2+8(1-i)=-2i=(1-i)^2$

ومنه : $z_1=(1+3i)+(1-i)=2+2i$

و $z_2=(1+3i)-(1-i)=4i$

وبالتالي $S=\{2,2+2i,4i\}$

2- لدينا $z_0z_2=8i$ و $z_1{}^2=(2+2i)^2=8i$ أي $z_0z_2=z_1{}^2$

إذن $z_0$ و $z_1$ و $z_2$ حدود متتابعة من متتالية هندسية .

وبما أن $u_0=z_0$ فإن $u_1=z_1$ وبالتالي $q=\dfrac{z_1}{z_0}=1+i$

و $u_{16}=u_0q^{16}=2(1+i)^{16}=2(2i)^8=2^9i^8=2^9$

3- النقطة $G$ مرجح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,1)$

يعني $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

يكافئ $(z_A-z_G)-(z_B-z_G)+(z_C-z_G)=0$

يكافئ $z_G=z_A-z_B+z_C$

يكافئ $z_G=2i$

**التمرين الثالث:**

1- لدينا $I_1=\int_0^1 xe^{-x}dx$

نضع : $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases}$

ومنه $I_1=\left[-xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx$

أي $I_1=\left[-xe^{-x}\right]_0^1+\left[-e^{-x}\right]_0^1$

بالتالي $I_1=1-\dfrac{2}{e}$

2- لكل $n \in IN^*-\{1\}$ لدينا $I_n=\int_0^1 x^ne^{-x}dx$

نضع : $\begin{cases} u(x)=x^n \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=nx^{n-1} \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases}$

ومنه $I_n=\left[-x^ne^{-x}\right]_0^1+n\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx$

أي $I_n=nI_{n-1}-\dfrac{1}{e}$

2- ب حسب العلاقة الأخيرة لدينا

$$I_2 = 2I_1 - \frac{1}{e} = 2(1-\frac{2}{e}) - \frac{1}{e}$$

أي $I_2 = 2 - \frac{5}{e}$

و $I_3 = 3I_2 - \frac{1}{e} = 3(2-\frac{5}{e}) - \frac{1}{e}$

أي $I_3 = 6 - \frac{16}{e}$

2- ج لدينا: $\int_0^1 (2x^3 - 4x^2)e^{-x}dx = \int_0^1 (2x^3e^{-x} - 4x^2e^{-x})dx$

$$= 2\int_0^1 x^3e^{-x}dx - 4\int_0^1 x^2e^{-x}dx$$
$$= 2I_3 - 4I_2$$
$$= 2(6-\frac{16}{e}) - 4(2-\frac{5}{e})$$
$$= 4(1-\frac{3}{e})$$

3-أ لدينا : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n(x-1)e^{-x}dx$

و بما أن الدالة $x -> x^n(x-1)e^{-x}$ سالبة على المجال $[0,1]$

فإن $\int_0^1 x^n(x-1)e^{-x}dx < 0$ و منه المتتالية $(I_n)_{n\in IN^*}$ تناقصية.

ولدينا لكل $n \in IN^*$ الدالة $x -> x^n e^{-x}$ موجبة على المجال $[0,1]$

إذن $\int_0^1 x^n e^{-x}dx > 0$ أي $I_n > 0$

ومنه المتتالية $(I_n)_{n\in IN^*}$ مصغورة بالعدد 0 .

3-ب بما أن المتتالية $(I_n)_{n\in IN^*}$ تناقصية و مصغورة بالعدد 0 فإنها متقاربة .

3- ج لدينا على المجال $[0,1]$ $e^{-x} \le 1$

ومنه $x^n e^{-x} \le x^n$ لكل $n \in IN^*$

و بالتالي $\int_0^1 x^n e^{-x}dx \le \int_0^1 x^n dx$

أي $I_n \le \frac{1}{n+1}$

بما أن $0 < I_n \le \frac{1}{n+1}$ و $\lim_{x->+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

فإن $\lim_{n->+\infty} I_n = 0$ .

**المسألة :**

**الجزء الأول:**

1- لدينا $\lim_{x->0^+} g(x) = \lim_{w->0^+} x+1-\ln(x) = +\infty$

و $\lim_{x->+\infty} g(x) = \lim_{x->+\infty} x+1-\ln(x)$

$$= \lim_{x->+\infty} x(1+\frac{1}{x}-\frac{\ln(x)}{x})$$
$$= +\infty$$

2- لكل $x$ من $IR^{*+}$ لدينا $g'(x) = 1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ على المجال $]0,+\infty[$

جدول تغيرات الدالة $g$ :

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | - | | + |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $2$ | $+\infty$ |

3- لدينا 2 قيمة دنيا للدالة $g$ أي أن لكل $x$ من $IR^{*+}$ $g(x) \ge 2$ و بالتالي لكل $x$ من $IR^{*+}$ $g(x) > 0$ .

**الجزء الثاني :**

1- لدينا $\lim_{x->0^+} f(x) = \lim_{x->0^+} e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)} = 0$

ومنه $\lim_{x->0^+} f(x) = f(0)$

إذن الدالة $f$ متصلة على اليمين في النقطة 0 .

لدينا $\lim_{x->+\infty} f(x) = \lim_{x->+\infty} e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)} = +\infty$

2- أ لكل $x$ من المجال $]0,+\infty[$ لدينا :

$$f(x) = e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)} = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} = e^{\ln(x)+\frac{1}{x}\ln(x)} = e^{\ln(x)}e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$$
$$= xe^{\frac{1}{x}\ln(x)}$$

وبالتالي $\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$

2- ب لدينا :

$$\lim_{x->0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x->0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x->0^+} e^{\frac{1}{x}\ln(x)} = 0$$

ومنه الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة 0

تأويل هندسي : منحنى الدالة $f$ يقبل نصف مماس أفقي في النقطة $o$ أصل المعلم.

2- ج لدينا : $\lim_{x->+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x->+\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 1$

2- د لدينا : $\lim_{x->+\infty} \frac{f(x)-x}{\ln(x)} = \lim_{x->+\infty} \frac{xe^{\frac{\ln(x)}{x}} - x}{\ln(x)}$

$$= \lim_{x->+\infty} \frac{x(e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1)}{\ln(x)}$$
$$= \lim_{x->+\infty} \frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1}{\frac{\ln(x)}{x}}$$

نضع : $t = \frac{\ln(x)}{x}$

لدينا : $x -> +\infty \Rightarrow t -> 0$

ومنه $\lim_{x->+\infty} \frac{f(x)-x}{\ln(x)} = \lim_{t->0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

استنتاج: $\lim_{x->+\infty} f(x) - x = \lim_{x->+\infty} \frac{f(x)-x}{\ln(x)}\ln(x) = +\infty$

منحنى الدالة $f$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = x$

3- لكل $x$ من المجال $]0,+\infty[$ لدينا : $f'(x)=(e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)})'$

$$=(\frac{x+1}{x}\ln(x))'e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)}$$
$$=((\frac{x+1}{x})'\ln(x)+\frac{x+1}{x}\ln'(x))f(x)$$
$$=(\frac{-1}{x^2}\ln(x)+\frac{x+1}{x^2})f(x)$$
$$=\frac{x+1-\ln(x)}{x^2}f(x)$$
$$=\frac{g(x)}{x^2}f(x)$$

وبما أن $g(x)>0$ لكل $x$ من $]0,+\infty[$ (حسب س 3 من ج 1)

فإن $f'(x)\geq 0$ لكل $x$ من $]0,+\infty[$.

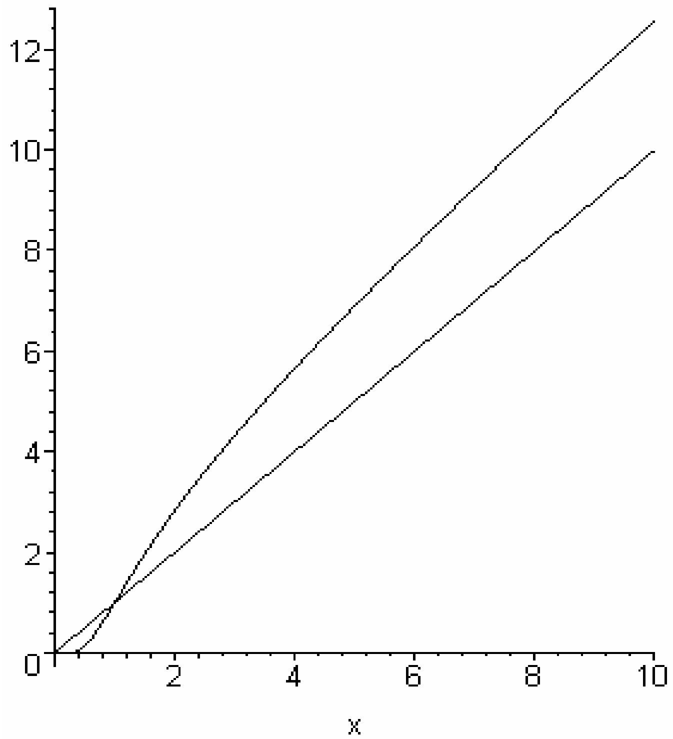
<u>جدول تغيرات الدالة</u> $f$.

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ ↗ $+\infty$ |

4- أ حساب $f(1)$ و $f(2)$ و $f(3)$

$$f(1)=e^{\frac{1}{2}\ln(1)}=e^0=1$$
$$f(2)=e^{\frac{3}{2}\ln(2)}=e^{\ln(2^{\frac{3}{2}})}=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$$
$$f(3)=e^{\frac{4}{3}\ln(3)}=e^{\ln(3^{\frac{4}{3}})}=3^{\frac{4}{3}}$$

4- ب <u>منحنى الدالة</u> $f$ .




الرسم تم باستعمال Logiciel Maple 9.5

5- أ بما أن الدالة $g$ متصلة و موجبة على المجال $[1,\lambda]$ حيث $\lambda>1$

(أنظر الجزء 1) فإن: $A(\lambda)=\int_1^{\lambda}g(x)dx.ua$

$$=\int_1^{\lambda}(x+1-\ln(x))dx.ua$$
$$=(\int_1^{\lambda}(x+1)dx-\int_1^{\lambda}\ln(x)dx).ua$$
$$=([\frac{1}{2}x^2+x]_1^{\lambda}-[x\ln(x)-x]_1^{\lambda}).ua$$
$$=[\frac{1}{2}x^2+x-x\ln(x)+x]_1^{\lambda}.ua$$
$$=[\frac{1}{2}x^2+2x-x\ln(x)]_1^{\lambda}.ua$$
$$=(\frac{1}{2}\lambda^2+2\lambda-\lambda\ln(\lambda)-\frac{5}{2}).ua$$

5- ب $\lim_{\lambda->+\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda->+\infty}(\frac{1}{2}\lambda^2+2\lambda-\lambda\ln(\lambda)-\frac{5}{2}).ua$

$$=\lim_{\lambda->+\infty}\lambda^2(\frac{1}{2}+\frac{2}{\lambda}-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}-\frac{5}{2\lambda^2}).uv$$
$$=+\infty$$

## <u>الجزء الثالث:</u>

1- لنبين بالترجع أن $1\leq u_n<e \quad \forall n\in IN$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$ أي $1\leq u_0<e$

ليكن $n$ من $IN$ نفترض أن $1\leq u_n<e$ ونبين أن $1\leq u_{n+1}<e$

لدينا $g$ دالة تزايدية على المجال $[1,+\infty[$ (أنظر س2من الجزء1)

ومنه $g(1)\leq g(u_n)<g(e)$ وهذا يعني $2\leq u_{n+1}<e$

وبالتالي $1\leq u_{n+1}<e$

وحسب مبدأ الترجع $1\leq u_n<e \quad \forall n\in IN$ .

2- لنبين أن المتتالية $(u_n)$ تزايدية

لكن $n$ من $IN$ لدينا : $u_{n+1}-u_n=g(u_n)-u_n$

$$=u_n+1-\ln(u_n)-u_n$$
$$=1-\ln(u_n)$$

وبما أن $u_n<e$ فإن $\ln(u_n)<\ln(e)$ أي $\ln(u_n)<1$

و بالتالي $1-\ln(u_n)>0$

ومنه المتتالية $(u_n)$ تزايدية قطعا .

3- بما أن المتتالية $(u_n)$ تزايدية و مكبورة بالعدد $e$ فهي متقاربة.

لدينا $g$ متصلة على المجال $]0,+\infty[$ و تزايدية على $[1,+\infty[$

ومنه $g$ متصلة على المجال $[1,e]$ لأن $[1,e]\subset]0,+\infty[$

و تزايدية على المجال $[1,e]$ لأن $[1,e]\subset[1,+\infty[$

وبالتالي : $g([1,e])=[2,e]\subset[1,e]$ .

وبما أن $(u_n)$ متقاربة فإن نهايتها $l$ تحقق المعادلة $g(l)=l$

ولدينا $g(l)=l\Leftrightarrow l+1-\ln(l)=l$

$$\Leftrightarrow 1-\ln(l)=0$$
$$\Leftrightarrow \ln(l)=1$$
$$\Leftrightarrow l=e$$

ومنه $\lim_{n->+\infty}u_n=e$

R

| الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين<br>بجهة الدار البيضاء الكبرى<br>الثانوية التأهيلية الحسين بن علي | الامتحان التجريبي الموحد أبريل2007<br>لمستوى السنة الثانية من سلك الباكلوريا<br>في مـــــادة الرياضيات | الشعـــبة: علوم تجريبية<br>مدة الإنجـاز: 3ساعات<br>المعامـــل: 7 |
|---|---|---|

**تمرين1:** نعتبر في C الحدودية: $P(z)=z^3-(5+7i)z^2+(26i-6)z+24(1-i)$

1) أ- احسب $P(4i)$ ثم احسب $(1+3i)^2$. 1ن

ب- حدد $a$ و $b$ من C حيث $(\forall z\in C);P(z)=(z-4i)(z^2+az+b)$ , ثم استنتج حلول المعادلة: $P(z)=0$. 1.5ن

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر النقط: $A,B$ و $C$ ألحاقها على التوالي: $Z_A=4i$, $Z_B=2$ و $Z_C=3+3i$.

اكتب على الشكل المثلثي العدد: $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$. 1ن

**تمرين2:** في الفضاء $(\mathcal{E})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;i,j,k)$, نعتبر النقط: $A(1,0,-1)$ , $B(-1,1,0)$ و $C(0,1,-1)$

1) أ_ احسب $AB\wedge AC$ ثم اعط معادلة ديكارتية للمستوى $(ABC)$. 1ن

ب- اعط تمثيلا بارمتريا للمستقيم $(\Delta)$ المار من النقطة $D(2,1,3)$ و العمودي على المستوى $(ABC)$, 0.5ن

ج- حدد $H$ نقطة تقاطع $(\Delta)$ و $(ABC)$. 0.5ن

2) أ- اكتب معادلة ديكارتية للفلكة $(S)$ التي أحد أقطارها: $[DH]$. 0.75ن

ب- حدد تقاطع الفلكة $(S)$ والمستوى $(ABC)$. 0.5ن

ج- اكتب معادلة ديكارتية للمستوى الموازي ل $(ABC)$ قطعا والمماس للفلكة $(S)$. 0.75ن

**تمرين3:** 1) احسب التكامل: $I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}|\ln x|^3dx$. 1ن

2) باستعمال المكاملة بالأجزاء احسب التكامل: $J=\int_0^1 xArc\tan x dx$. 1ن

3) احسب التكامل: $K=\int_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{e^t}{4(e^t+1)+2\sqrt{e^t+1}}dt$ مستعملا التغيير التالي: $x=\sqrt{e^t+1}$. 1ن

**مسألة:** $f$ دالة عددية معرفة على $IR$ بما يلي: $\begin{cases} f(x)=x\ln(x)-2x & ;x>0 \\ f(x)=(2x-3)e^{2x}+4e^x-1 & ;x\le 0\end{cases}$ و $(C_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;i,j)$,

**1) أ- بين أن الدالة $f$ متصلة في $x_0=0$** (0.5ن) ب- احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ (0.5ن)

**2) نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $IR$** بما يلي: $h(x)=(x-1)e^x+1$

ادرس تغيرات الدالة $h$ وبين أن $h(x)\ge 0$ $(\forall x\in IR)$ 1ن

**3) أ- تحقق من أن** $\frac{f(x)}{x}=2e^{2x}-\frac{3(e^{2x}-1)}{x}+\frac{4(e^x-1)}{x}$ $(\forall x<0)$**.** **0.25ن**

**ب- استنتج أن $f$ قابلة للإشتقاق في 0 على اليسار, ثم ادرس قابلية اشتقاق $f$ في 0 عن اليمين .** **1ن**

(4 أ- بين أن $(f'(x)=\ln(x)-1\ ;x>0)$ و $(f'(x)=4h(x)e^x\ ;x\le 0)$ 1ن

ب- اعط جدول تغيرات الدالة $f$. 0.5ن

(5 أ- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$. **0.25ن**

ب- حدد تقاطع $(C_f)$ مع محور الأفاصيل في المجال $]0,+\infty[$ ثم انشيء $(C_f)$. 1.5ن

**6)** ليكن $g$ قصور الدالة $f$ على المجال $I=[e,+\infty[$

أ- بين أن $g$ تقابل من المجال $I$ نحو مجال $J$ يتم تحديده. 0.5ن

ب- انشيء منحنى الدالة $g$ في نفس المعلم. 0.5ن

(7 نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ حيث: $u_0=0$ و $u_{n+1}=g^{-1}(u_n)$ $(\forall n\in IN)$

أ- بين أن $-e\le u_n\le e^3$ $(\forall n\in IN)$ (0.75ن) ب- بين أن المتتالية $(u_n)$ تزايدية قطعا. 0.5ن

ج- استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة وحدد نهايتها. 0.75ن

Sajid mohammed sajid@madariss.fr www.madariss.fr

نيابة عين السبع الحي المحمدي
ثانية الحسين بن علي

امتحان تجريبي2007 (علوم تجريبية )

**تمرين1**

**-1**

أ-

$$P(4i)=(4i)^3-(5+7i)(4i)^2+(26i-6)(4i)+24(1-i)$$
$$=-64i+80+112i-104-24i+24-24i$$
$$=0$$

$$(1+3i)^2=1+6i-9$$
$$=-8+6i$$

إذن $4i$ جذر للحدودية $P(z)$ و بالتالي يوجد زوج $(a;b)\in\mathbb{C}^2$ حيث : $p(z)=(z-4i)(z^2+az+b)$

ب-

$p(z)=(z-4i)(z^2+az+b)$ تكافئ $p(z)=z^3+(a-4i)z^2+(b-4ai)z-4ib$ إذن :
$$\begin{cases} a-4i=-5-7i \\ b-4ai=26i-6 \\ -4ib=24-24i \end{cases}$$

أي $\begin{cases} a=-5-3i \\ b=6+6i \end{cases}$

خلاصة :

♦ $p(z)=(z-4i)(z^2+(-5-3i)z+(6+6i))$

♦
$$P(z)=0 \Leftrightarrow z-4i=0 \quad ou \quad z^2+(-5-3i)z+(6+6i)=0$$
$$\Leftrightarrow z=4i \quad ou \quad z^2+(-5-3i)z+(6+6i)=0\,(E)$$

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ . لدينا:

$$\Delta=(-5-3i)^2-4(6+6i)$$
$$=16+30i-24-24i$$
$$=-8+6i$$
$$=(1+3i)^2$$

إذن $1+3i$ أحد الجذور المربعة للعدد $\Delta$ و منه فإن حلول المعادلة $(E)$ هي :

$$z=\frac{5+3i-1-3i}{2} \quad ou \quad z=\frac{5+3i+1+3i}{2}$$
$$z=2 \quad ou \quad =3+3i$$

إذن $S=\{4i;3+3i;2\}$

**-2**

Sajid mohammed sajid@madariss.fr www.madariss.fr

$$\begin{aligned}\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}&=\frac{4i-2}{(3+3i)-2}\\&=\frac{4i-2}{1+3i}\\&=\frac{(4i-2)(1-3i)}{10}\\&=\frac{4i+12-2+6i}{10}\\&=1+i\\&=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]\end{aligned}$$

1

**تمرين2:**

**-1**

-أ

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-2;1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;1;0)$ إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0&1\\-1&-2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&-2\\1&1\end{vmatrix}\right)$ أي $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1;1;1)$

معادلة ديكارتية للمستوى $(ABC)$ هي على الشكل : $x+y+z+k=0$ و بما أن $A\in(ABC)$ فإن $1+0-1+k=0$ أي $k=0$

و منه فإن : $(ABC):x+y+z=0$

-ب

المستقيم $(\Delta)$ موجه بالمتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1;1;1)$ و يمر من $D(2,1,3)$ إذن $(\Delta):\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\ (t\in\mathbb{R})\\z=3+t\end{cases}$

-ج

لنحدد قيمة البارامتر $t$ حيث $(2+t)+(1+t)+(3+t)=0$ أي $t=-2$ ومنه فإن $H(0;-1;1)$

**-2**

-أ

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفلكة . إذن $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=0$ أي $(2-x)(-x)+(1-y)(-1-y)+(3-z)(1-z)=0$

ومنه فإن : $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$

-ب

ليكن $\Omega$ و $R$ مركز و شعاع الفلكة $(S)$ على التوالي . لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\frac{DH}{2}=R$ إذن الفلكة $(S)$ مماسة للمستوى $(ABC)$ في النقطة $H$ .

-ج

هذا المستوى هو المستوى المار من $D$ و الموازي ل $(ABC)$ إذن معادلته هي كذلك تكتب على شكل $x+y+z+k=0$ و بما أن النقطة $D(2,1,3)$ تنتمي إليه فإن $2+1+3+k=0$ أي $k=-6$ إذن معادلة المستوى هي $x+y+z-6=0$

**تمرين3:**

**-1**

$$I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}\left|\ln x\right|^{3}dx$$
$$=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}(\ln x)^{3}dx+\int_{1}^{e}\frac{1}{x}(\ln x)^{3}dx$$
$$=-\frac{1}{4}\left[(\ln x)^{4}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\frac{1}{4}\left[(\ln x)^{4}\right]_{1}^{e}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{2}$$

-2

$$u(x)=Arc\tan x \qquad u'(x)=\frac{1}{1+x^{2}}$$
$$v(x)=x^{2} \qquad v'(x)=2x$$
$$J=\left[x^{2}Arc\tan x\right]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}\frac{x^{2}}{1+x^{2}}dx$$
$$=\frac{\pi}{4}-\left(\int_{0}^{1}1-\frac{1}{1+x^{2}}dx\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}-\left[x-Arc\tan x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}-1$$

-3

$$x=\sqrt{e^t+1}\Rightarrow x^2=e^t+1\Rightarrow 2xdx=e^t dt$$
$$t=\ln 8\Rightarrow x=3$$
$$t=\ln 3\Rightarrow x=2$$
$$\begin{aligned}K&=\int_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{e^t}{4(e^t+1)+2\sqrt{e^t+1}}dt\\&=\int_2^3\frac{2xdx}{4x^2+2x}\\&=\int_2^3\frac{dx}{2x+1}\\&=\frac{1}{2}\int_2^3\frac{2dx}{2x+1}\\&=\frac{1}{2}\left[\ln\left(2x+1\right)\right]_2^3\\&=\frac{1}{2}\left(\ln 7-\ln 5\right)\\&=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{5}\right)\end{aligned}$$

**مسألة:**

**1-**

أ-

$f(0)=0$

بما أن :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)-2x=0=f(0)$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$ نهاية مرجعية ، فإن f متصلة في الصفر

ب-

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x)&=\lim_{x\to+\infty} x\ln(x)-2x\\&=\lim_{x\to+\infty} x(\ln(x)-2)\\&=+\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x)&=\lim_{x\to-\infty}(2x-3)e^{2x}+4e^x-1\\&=\lim_{x\to-\infty}\left(2x\right)e^{(2x)}-3e^{2x}+4e^x-1\\&=-1\end{aligned}$$

**2-**

لكل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا : $h'(x)=e^x+\left(x-1\right)e^x=xe^x$ . إشارة $h'(x)$ هي إشارة $x$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

إذن $(\forall x \in IR)\ h(x) \geq 0$

**-3**

أ-

$$(\forall x \prec 0): \frac{f(x)}{x} = \frac{(2x-3)e^{2x}+4e^{x}-1}{x}$$
$$= \frac{2xe^{2x}-3e^{2x}+3+4e^{x}-1}{x}$$
$$= \frac{2xe^{2x}-3\left(e^{2x}-1\right)+4\left(e^{x}-1\right)}{x}$$
$$= 2e^{2x}-\frac{3(e^{2x}-1)}{x}+\frac{4(e^{x}-1)}{x}$$

ب-

بما أن :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} 2e^{2x}-\frac{3(e^{2x}-1)}{x}+\frac{4(e^{x}-1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} 2e^{2x}-6\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)+4\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)$$
$$= 2-6+4$$
$$= 0$$

فإن f قابلة للاشتقاق على يسار الصفر و $f_g'(0)=0$

لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln(x)-2x}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\ln(x)-2$$
$$= -\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على يمين الصفر و منحناها يقبل نصف مما موازي لمحور الأراتيب على يمين الصفر موجه نحو الأراتيب السالبة .

**-4**

أ-

$(\forall x \succ 0): f'(x) = \ln(x) + 1 - 2$

$= \ln(x) - 1$

♦ $f'(x)$ تنعدم في $x = e$

♦ $f'(x) \succ 0 \Rightarrow x \succ e$

♦ $f'(x) \prec 0 \Rightarrow 0 \prec x \prec e$

$(\forall x \leq 0): f'(x) = 2e^{2x} + 2e^{2x}(2x-3) + 4e^{x}$

$= 4e^{2x}(x-1) + 4e^{x}$

$= \left(e^{x}(x-1) + 1\right) \times 4e^{x}$

$= h(x) \times 4e^{x}$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;0]$ هي إشارة $h(x)$

ب-

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ \|\| $-\infty$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-e$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

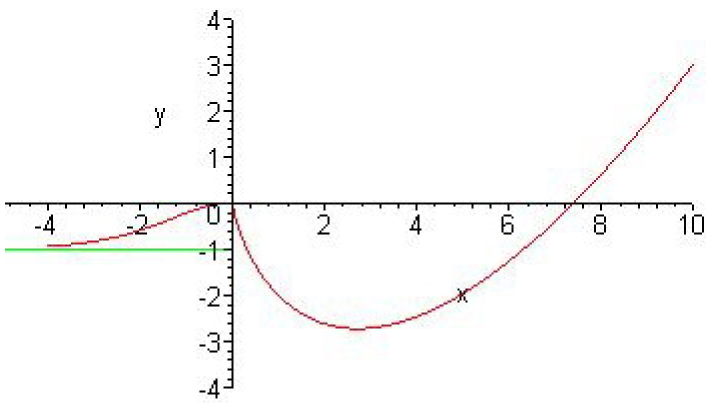
**-5**

أ-

بما ان $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) - 2 = +\infty$ فإن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأرتيب بجوار $+\infty$

ب-

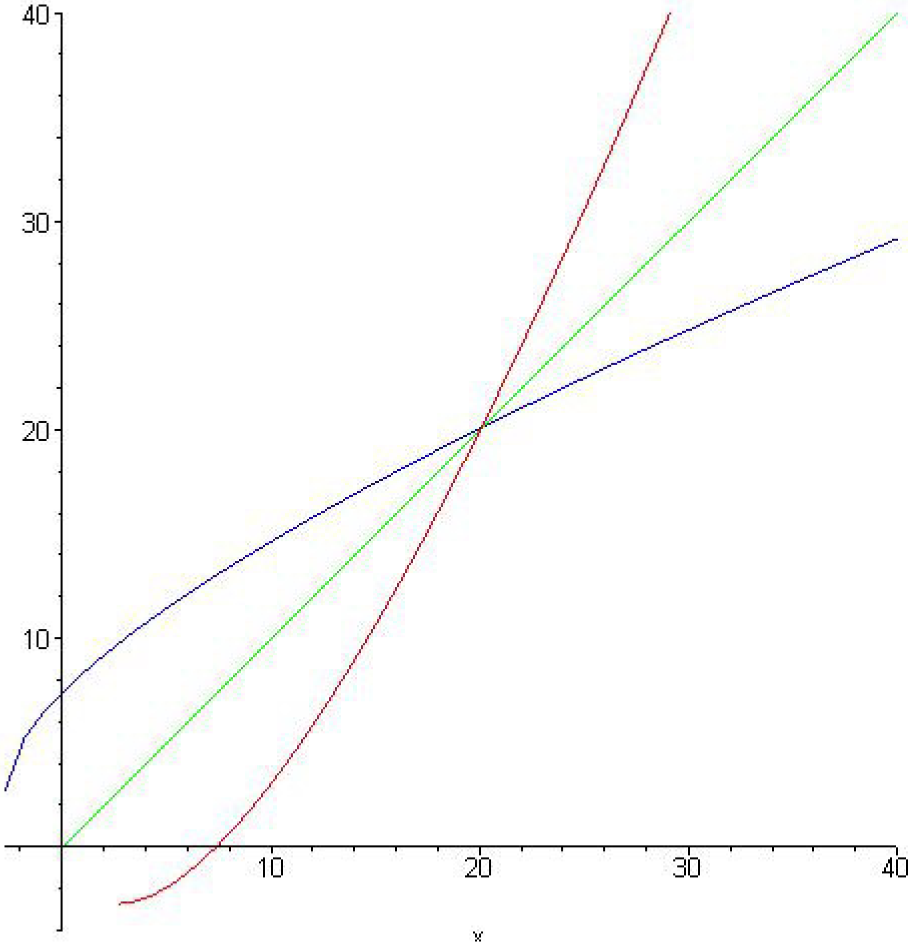
$(\forall x \succ 0): f(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 2$ أي $x = e^{2}$




**-6**

بما أن g متصلة و تزايدية قطعا على المجال $I=[e,+\infty[$ فإنها تقابل من I نحو $J=g(I)=g([e;+\infty[)$ أي $J=[-e;+\infty[$

ب-




**-7**

أ-

لاحظ أن $g$ و $g^{-1}$ و المنصف الأول يلتقيان في النقطة التي أفصولها $e^3$ و هذا يعني أن $g(e^3)=g^{-1}(e^3)=e^3$

لدينا $-e\le u_0\le e^3$ نفترض أنه توجد رتبة $n_0$ من $\mathbb{N}$ حيث لكل $n\le n_0$ : $-e\le u_n\le e^3$ . لتبث أن $-e\le u_{n+1}\le e^3$

بما أن $-e\le u_n\le e^3$ و $g^{-1}$ تزايدية قطعا على $[-e;+\infty[$ فإن $g^{-1}(-e)\le g^{-1}(u_n)\le g^{-1}(e^3)$ أي $-e\le e\le u_{n+1}\le e^3$

إذن : $(\forall n\in IN)\quad -e\le u_n\le e^3$

ب-

لاحظ أنه على المجال $\left[-e,e^3\right]$ منحنى الدالة $g^{-1}$ فوق المنصف الأول أي : $\forall x\in\left[-e,e^3\right]: g^{-1}(x)-x\ge 0$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}-u_n=g^{-1}(u_n)-u_n\ge 0$ أي $(u_n)$ تزايدية .

ج-

بما أن $(u_n)$ تزايدية و مكبورة بالعدد $e^3$ فإن $(u_n)$ متقاربة و نهايتها هي حل المعادلة $l=g^{-1}(l)$

$$\begin{aligned} l=g^{-1}(l) &\Rightarrow g(l)=l \\ &\Rightarrow \ln(l)-2=1 \\ &\Rightarrow \ln(l)=3 \\ &\Rightarrow l=e^3 \end{aligned}$$

| مادة الرياضيات | الإمتحان التجريبي للسنة الثانية | ثانوية الفتح |
| --- | --- | --- |
| مدة الإنجاز : 3 ساعات | باكالوريا علوم تجريبية | نيابة الخميسات |
| Prof : BENELKHATIR | دورة أبريل 2006 | ذ : عبد الله بن لختير |

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

■ **مسألة: ( 07 نقط و نصف )**

-- **الجزء الأول:** نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{1}{x}+\ln|x|$ .

و ليكن $(C_f)$ منحناها في معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

**1)-** حدد $D_f$ ، ثم أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ و اعط تأويلهما الهندسي . ( 0,75 ن )

**2)-** حدد النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم أدرس الفرعين اللانهائيين ل $(C_f)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$ . ( 1ن )

**3)-** أ- بين أن الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $D_f$ و أن : $\forall x\in D_f : f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$ . ( 0,25 ن )

ب- إستنتج رتابة الدالة $f$ و أنشيء جدول تغيراتها على $D_f$ . ( 0,25 ن )

ج- بين أن $(C_f)$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة أفصولها $\alpha$ ينتمي إلى المجال $\left]-2,-\frac{3}{2}\right[$ . ( 0,5 ن )

**4)-** بين أن $\forall x\in D_f : f''(x)=\frac{2-x}{x^3}$ ، ثم أدرس تقعر $(C_f)$ و حدد إحداثيتي نقطة إنعطافه $\Omega$ . ( 0,5 ن )

**5)-** أرسم المماس $(T)$ عند نقطة الإنعطاف $\Omega$ و المنحنى $(C_f)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ . ( 0,75 ن )

**6)-** بين أن الدالة العددية $F$ المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ ب: $F(x)=-x+(x+1)\ln x$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]0,+\infty[$ . ( 0,25 ن )

**7)-** إستنتج المساحة الهندسية للحيز $D$ المحصور بين محور الأفاصيل و المنحنى $(C_f)$ و المستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=e$ . ( 0,25 ن )

-- **الجزء الثاني:**

لتكن $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=|x|e^{\frac{1}{x}} ; x\in\mathbb{R}^* \\ g(0)=0 \end{cases} .$$

**1)-** أ- بين أن $\forall x\in\mathbb{R}^* : g(x)=e^{f(x)}$ ، ثم إستنتج النهايتين $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^-} g(x)$ و اعط تأويليهما الهندسي . ( 0,75 ن )

ب- حدد طبيعة الفرعين اللانهائيين ل $(C_g)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$ . ( 1 ن )

**2)-** أ- أدرس قابلية إشتقاق الدالة $g$ على يسار $x_0=0$ و اعط التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها .( 0,25 ن )

ب- أحسب $g'(x)$ على $\mathbb{R}^*$ بدلالة $f'(x)$ ، ثم إستنتج تغيرات الدالة $g$ إنطلاقا من تغيرات الدالة $f$ .( 0,5 ن )

**3)-** أنشيء المنحنى $(C_g)$ في معلم متعامد و ممنظم . ( 0,5 ن )

| مادة الرياضيات | الإمتحان التجريبي للسنة الثانية | ثانوية الفتح |
|---|---|---|
| مدة الإنجاز : 3 ساعات | باكالوريا علوم تجريبية | نيابة الخميسات |
| Prof : BENELKHATIR | دورة أبريل 2006 | ذ : عبد الله بن لختير |

■ **التمرين الأول: ( نقطتين و نصف )**

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ بحيث :

$\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ و $v_n = \ln(u_n)$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ .

**1)**- بين أن $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية و اعط أساسها و حدها الأول . ( 0,75 ن )

**2)**- عبر عن الحد العام $v_n$ بدلالة $n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ ، ثم إستنتج $\lim_{n\to+\infty} v_n$ . ( 0,5 ن )

**3)**- لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$ ، نضع $S_n = v_0 + v_1 + .... + v_{n-1}$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times .... \times u_{n-1}$ .

أ- عبر عن $S_n$ بدلالة $n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$ ، ثم إستنتج $\lim_{n\to+\infty} S_n$ . ( 0,5 ن )

ب- عبر عن $P_n$ بدلالة $S_n$ ، ثم إستنتج $\lim_{n\to+\infty} P_n$ . ( 0,75 ن )

■ **التمرين الثاني: ( 05 نقط )**

يحتوي صندوق على أربع كرات حمراء و كرتين سوداوين لا يمكن التمييز بينها باللمس .

**1)**- نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق ، أحسب إحتمال كل حدث من الأحداث التالية :

$A_0$ " لم تسحب أية كرة سوداء " و $A_1$ " سحبت كرة واحدة سوداء بالضبط "

و $A_2$ " الكرتين المسحوبتين سوداوين " ( 0,75 ن )

**2)**- بعد السحب الأول بقيت في الصندوق أربع كرات ، نجري سحبا ثانيا لكرتين بالتتابع و بدون إحلال .

و نعتبر الأحداث التالية :

$B_0$ " لم تسحب أية كرة سوداء عند السحب الثاني "

$B_1$ " سحبت بالضبط كرة واحدة سوداء عند السحب الثاني "

و $B_2$ " الكرتين المسحوبتين عند السحب الثاني سوداوين "

أ- أحسب الإحتمالات التالية : $p_{A_0}(B_0)$ و $p_{A_1}(B_0)$ و $p_{A_2}(B_0)$ ، ثم إستنتج $p(B_0)$ . ( 1ن )

ب- أحسب بنفس الطريقة الإحتماليين : $p(B_1)$ و $p(B_2)$ . ( 1 ن )

ج- إذا علمت أنه عند السحب الثاني حصلنا على كرة سوداء بالضبط ، فما هو إحتمال الحصول على كرة واحدة سوداء بالضبط عند السحب الأول ؟ ( 0,5 ن )

**3)**- نعتبر الحدث:

$R$ " لكي تسحب الكرتين السوداوين تم بالضبط إجراء السحب الأول والسحب الثاني "

بين أن : $p(R) = \frac{1}{3}$ . ( 0,75 ن )

**4)**- نسحب هذه المرة عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق ، و نعتبر المتغير العشوائي $X$ الذي يربط كل سحبة ممكنة بعدد الكرات الحمراء المكونة لها .

حدد قانون إحتمال المتغير العشوائي $X$ ، ثم أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ . ( 1 ن )

| ثانوية الفتح | الإمتحان التجريبي للسنة الثانية | مادة الرياضيات |
|---|---|---|
| نيابة الخميسات | باكالوريا علوم تجريبية | مدة الإنجاز : 3 ساعات |
| ذ : عبد الله بن لختير | دورة أبريل 2006 | Prof : BENELKHATIR |

■ **التمرين الثالث: ( نقطة و نصف )**

في الفضاء $(E)$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقطة $\Omega(2,1,1)$ و المستوى $(P)$

الذي معادلته : $x+2y-3z=10$ .

**1)**- أكتب معادلة ديكارتية للفلكة $(S)$ التي مركزها $\Omega$ و شعاعها $r=3$ . **( 0,5 ن )**

**2)**- أحسب $d(\Omega,(P))$ ، ثم إستنتج أن $(S)\cap(P)$ دائرة $(C)$ يتم تحديد مركزها $H$ و شعاعها $R$ . **( 1 ن )**

■ **التمرين الرابع: ( ثلاث نقط و نصف )**

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ الحدودية : $P(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})z-8i$ .

**1)**- بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0$ ينبغي تحديده . **( 0,25 ن )**

**2)**- تحقق من أن : $\forall z\in\mathbb{C}:P(z)=(z-z_0)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$ .

ثم أوجد في المجموعة $\mathbb{C}$ العددين $z_1$ و $z_2$ حلي المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

حيث $\operatorname{Im}(z_2)\prec 0$ . **( 0,5 ن )**

**3)**- أكتب على الشكل المثلثي الأعداد العقدية التالية : $z_0$ و $z_1$ و $z_2$ و $z_1-z_0$ و $z_2-z_0$ . **( 1,25 )**

**4)**- المستوى العقدي $(P)$ منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ .

أنشيءالنقط $A(z_0)$ و $B(z_1)$ و $C(z_2)$ ، ثم بين أن الرباعي $OABC$ معين . **( 1,5 ن )**

| ثانوية الفتح<br>نيابة الخميسات | تصحيح الإمتحان التجريبي<br>لدورة أبريل 2006 | 2 ع ت 01 + 2 ع ت 02<br>Prof : BENELKHATIR |
|---|---|---|

■ **مسألة:**

■ **الجزء الأول:**

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln|x|$$

**1)- لدينا :**

$$x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 0 \text{ و } |x|\succ 0$$
$$\Leftrightarrow x\neq 0$$

إذن : $D_f=\mathbb{R}^*$ .

- نهايتي $f$ عند $+\infty$ و $-\infty$ :

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0^-}\ln|x|=-\infty\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$

و $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}(1+x\ln x)$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to0^+}1+x\ln x=1$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

فإن : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ .

نستنتج أن $(C_f)$ يقبل مقاربا رأسيا معادلته $x=0$

أي $(Oy)$ .

**2)- لدينا :** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$ ،

إذن : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln|x|=+\infty$ .

و $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}+\frac{\ln|x|}{x}$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\ln|x|}{x}=0$

فإن : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

و هذا يعني أن $(C_f)$ يقبل بجوار $+\infty$ و $-\infty$ فرعين شلجميين إتجاههما $(Ox)$ .

**3)- أ- بما أن الدالة $f$ مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ .**

إذن فهي قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و لدينا :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*: f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'+\left(\ln|x|\right)'$$
$$=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}$$
$$=\frac{x-1}{x^2}$$

**ب- لدينا :** $\forall x\in\mathbb{R}^*: sg\left[f'(x)\right]=sg(x-1)$

إذن الدالة $f$ تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$

و تناقصية قطعا على المجالين $]0,1]$ و $]-\infty,0[$ .

و جدول تغيراتها يكون على الشكل التالي :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

**ج- من خلال جدول تغيرات الدالة $f$ نستنتج أن :**

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*: f(x)\geq 1$$

إذن المعادلة $(E): f(x)=0$ لا تقبل حلا في المجال $\mathbb{R}_+^*=]0,+\infty[$ .

و الدالة $f$ تناقصية قطعا على المجال $]-\infty,0[=\mathbb{R}_-^*$

و $f(\mathbb{R}_-^*)=\mathbb{R}$ .

إذن المعادلة $(E): f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $]-\infty,0[$ .

و بما أن : $f(-2)=\frac{-1+\ln 4}{2}\succ 0:(4\succ e)$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{-2+\ln\left(\frac{27}{8}\right)}{3}\prec 0;\left(\frac{27}{8}\prec 4\prec e^2\right)$$

فحسب مبرهنة القيم الوسيطية لدينا : $-2\prec\alpha\prec-\frac{3}{2}$

وبالتالي $(C_f)$ يقطع $(Ox)$ في نقطة وحيدة أفصولها $\alpha$.

**4)- بما أن $f'$ دالة جذرية فإنها قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ مجموعة تعريفها و لدينا :**

$$\forall x\in\mathbb{R}^*: f''(x)=\left(f'\right)'(x)$$
$$=\left(\frac{x-1}{x^2}\right)'=\frac{x^2-(x-1)\times 2x}{\left(x^2\right)^2}$$
$$=\frac{x(-x+2)}{x^4}=\frac{2-x}{x^3}$$

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}^*: sg\left[f''(x)\right]=sg\left[x(2-x)\right]$

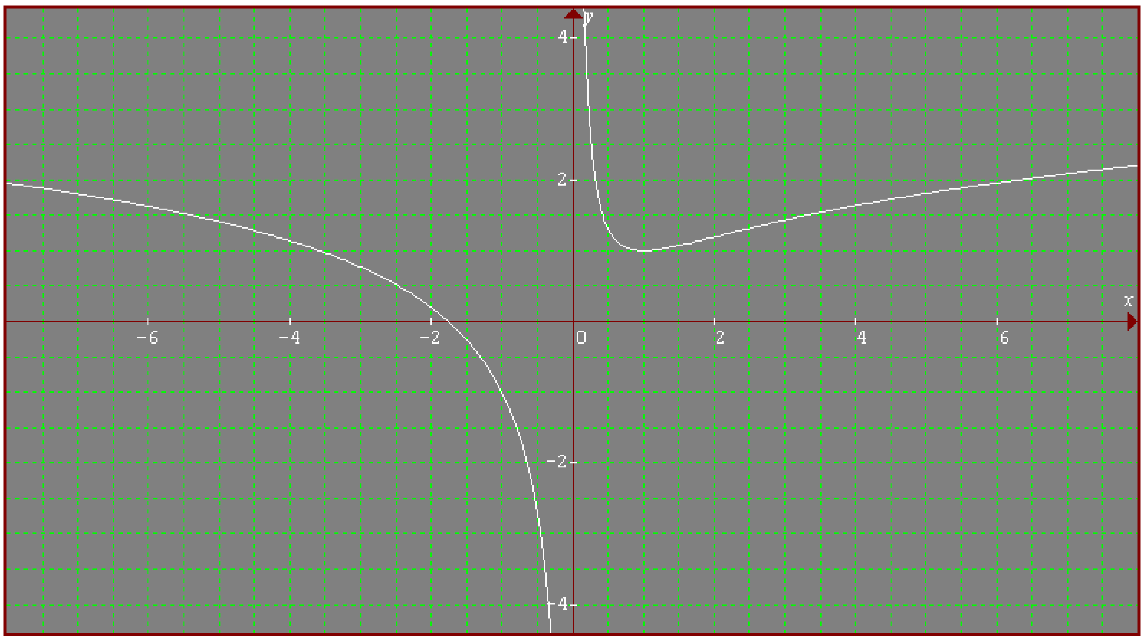
| ثانوية الفتح<br>نيابة الخميسات | تصحيح الإمتحان التجريبي<br>لدورة أبريل 2006 | 2 ع ت 01 + 2 ع ت 02<br>Prof : BENELKHATIR |
|---|---|---|

وجدول إشارة $f''(x)$ يكون على الشكل التالي :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

إذن $(C_f)$ مقعر على المجالين $]-\infty,0[$ و $]2,+\infty[$ و محذب على المجال $]0,2[$ و يقبل نقطة إنعطاف واحدة هي $\Omega\left(2,\frac{1}{2}+\ln 2\right)$ .

**6)- إنشاء المنحنى $(C_f)$ :**




■ **الجزء الثاني:**

**1)- أ- لدينا :** $\forall x \in \mathbb{R}^* : g(x) = e^{\ln|x|} \times e^{\frac{1}{x}}$

$$= e^{\frac{1}{x}+\ln|x|} = e^{f(x)}$$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}^* : g(x) = e^{f(x)}$ .

ومنه فإن :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$$

إذن $(Oy)$ مقارب أفقي ل $(C_g)$ .

و $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0 = g(0)$

إذن الدالة $g$ متصلة على يسار $x_0 = 0$ .

ب- لدينا $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$

و بما أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

و $\lim_{x\to+\infty} g(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = 1$

فإن $(C_g)$ يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا معادلته :

$y = x + 1$ .

لدينا أيضا : $\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -e^{\frac{1}{x}} = -e^0 = -1$

| 2 ع ت 01 + 2 ع ت 02<br>Prof : BENELKHATIR | تصحيح الإمتحان التجريبي<br>لدورة أبريل 2006 | ثانوية الفتح<br>نيابة الخميسات |
|---|---|---|

و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)+x = -\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = -1$ .

إذن $(C_g)$ يقبل بجوار $-\infty$ مقاربا مائلا معادلته : $y=-(x+1)$ .

**2)- أ- لدينا :**

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} -e^{\frac{1}{x}} = -e^{\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}} = 0$ ، إذن

$g$ قابلة للإشتقاق على يسار $x_0=0$ و $g'_g(0)=0$

و هذا يعني أن $(C_g)$ يقبل نصف مماس على يسار **0** يوازي $(Ox)$ .

ب- بما أن : $\forall x\in\mathbb{R}^*: g(x)=e^{f(x)}$ ، و الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ، فإن $g$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ، و لدينا :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*: g'(x)=f'(x)e^{f(x)}$$

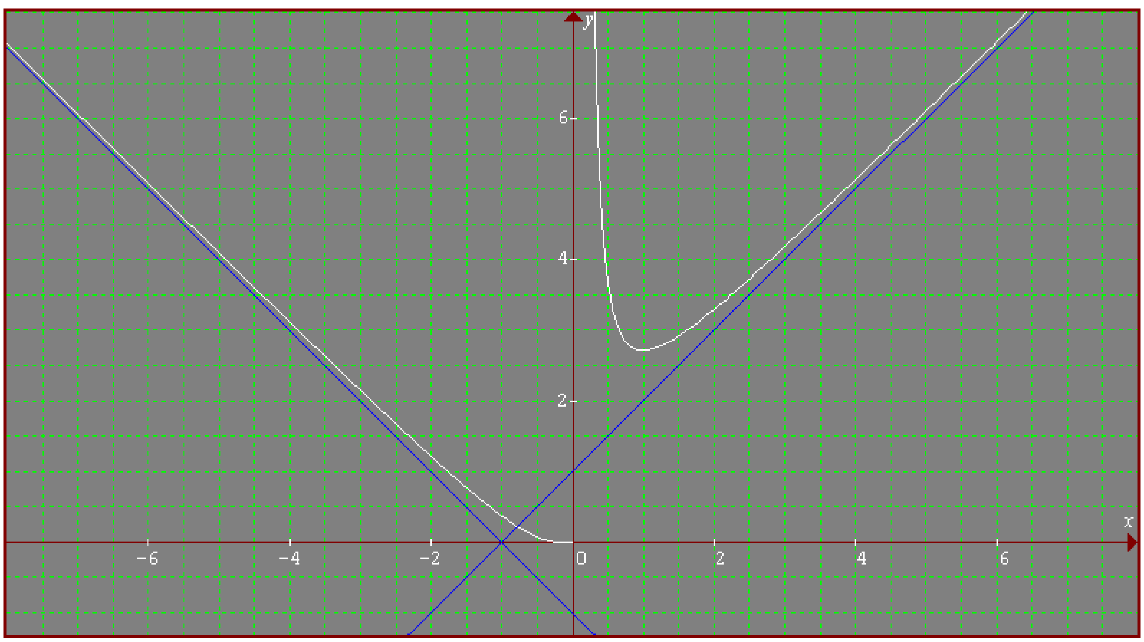
و بالتالي :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*: sg\left[g'(x)\right]=sg\left[f'(x)\right]$$

و جدول تغيرات الدالة $g$ يكون على الشكل التالي :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | - | ‖ | - | $0$ | + | |
| $g$ | $+\infty$ ↘ | $0$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $e$ | ↗ | $+\infty$ |

**3)- إنشاء المنحنى $(C_g)$:**




■ **تمرين01:**

**1)- لدينا :**

$$\forall n\in\mathbb{N}: v_{n+1}=\ln(u_{n+1})=\ln\left(\sqrt[3]{u_n}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\ln(u_n)=\frac{1}{3}v_n$$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}: v_{n+1}=\dfrac{1}{3}v_n$

و بالتالي فإن $(v_n)$ متتالية هندسية إساسها $q=\dfrac{1}{3}$

و حدها الأول : $v_0=\ln(u_0)=\ln e=1$ .

**2)- لدينا :** $\forall n\in\mathbb{N}: v_n=v_0\times q^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ لأن : $0\le\dfrac{1}{3}\prec1$ .

3)- أ- لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = v_0 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$

إذن : $S_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ .

و بما أن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}$ .

ب- لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\ln(u_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} u_k\right)$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = \ln(P_n)$

هذه يعني أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : P_n = e^{S_n}$ .

وبالتالي : $\lim_{n\to+\infty} P_n = e^{\lim_{n\to+\infty} S_n} = e^{\frac{3}{2}}$ .

■ **تمرين02:**

1)- الصندوق يحتوي على 4 كرات حمراء و 2 سوداوين بما أننا في حالة تساوي الإحتمال ( لا يمكن التمييز بين الكرات ) ، فإن :

$$p(A_0) = \frac{card(A_0)}{card(\Omega)} = \frac{A_4^2}{A_6^2}$$

إذن : $P(A_0) = \frac{4\times 3}{6\times 5} = \frac{2}{5}$ .

و $p(A_1) = \dfrac{card(A_1)}{card(\Omega)} = \dfrac{2\times A_4^1 \times A_2^1}{A_6^2}$

إذن : $P(A_1) = \frac{2\times 4\times 1}{6\times 5} = \frac{8}{15}$ .

و $p(A_2) = \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{2\times 1}{6\times 5} = \frac{1}{15}$ .

لاحظ أن المثلوث $(A_0, A_1, A_2)$ تجزيء للفضاء $\Omega$

و أن : $p(A_0) + p(A_1) + p(A_2) = 1$ .

2)- أ- + ب- نحسب الإحتمالات الشرطية :

$p_{A_0}(B_0)$ و $p_{A_1}(B_0)$ و $p_{A_2}(B_0)$ .

- إذا تحقق الحدث $A_0$ فإن الصندوق يحتوي على كرتين حمراوين و كرتين سوداوين ، إذن :

$$p_{A_0}(B_0) = \frac{A_2^2}{A_4^2} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

لدينا في هذه الحالة أيضا :

$$p_{A_0}(B_1) = \frac{2\times A_2^1 \times A_2^1}{A_4^2} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

و $p_{A_0}(B_2) = \frac{A_2^2}{A_4^2} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ .

- إذا تحقق الحدث $A_1$ فإن الصندوق يحتوي على 3 كرات حمراء و كرة واحدة سوداء ، إذن :

$$p_{A_1}(B_0) = \frac{A_3^2}{A_4^2} = \frac{3\times 2}{12} = \frac{1}{2}$$

و في هذه الحالة يكون لدينا :

$$p_{A_1}(B_1) = \frac{2\times A_3^1 \times A_1^1}{A_4^2} = \frac{2\times 3\times 1}{12} = \frac{1}{2}$$

و $p_{A_1}(B_2) = \frac{0}{A_4^2} = 0$ ( لا يمكن سحب كرتين سوداوين لأن الصندوق يحتوي على كرة واحدة سوداء )

- إذا تحقق الحدث $A_2$ فإن الصندوق يحتوي على 4 كرات حمراء فقط ، إذن :

$p_{A_2}(B_0) = 1$ و $p_{A_2}(B_1) = p_{A_2}(B_2) = 0$ .

نستنتج الآن $p(B_0)$ و $p(B_1)$ و $p(B_2)$ .

نطبق صيغة الإحتمالات الكلية ، فنحصل على :

$$p(B_0) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{6} + \frac{8}{15}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{15}\times 1$$

إذن : $p(B_0) = \frac{1+4+1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ .

و $p(B_1) = \frac{2}{5}\times\frac{2}{3} + \frac{8}{15}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{15}\times 0$

إذن : $p(B_1) = \frac{4+4}{15} = \frac{8}{15}$ .

و $p(B_2) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{6} + \frac{8}{15}\times 0 + \frac{1}{15}\times 0$

إذن : $p(B_2) = \frac{1}{15}$ .

ولاحظ أنه في هذه الحالة لدينا :

$p(B_0) + p(B_1) + p(B_2) = 1$ .

ج- نحسب الإحتمال الشرطي : $p_{B_1}(A_1)$ .

$$p_{B_1}(A_1) = \frac{p(A_1 \cap B_1)}{p(B_1)} = \frac{p(A_1)\times p_{A_1}(B_1)}{p(B_1)}$$

إذن : $p_{B_1}(A_1) = \dfrac{\frac{8}{15}\times\frac{1}{2}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{2}$ .

3)- لدينا : $R = \{A_0 \to B_2, A_1 \to B_1\}$ ، بمعنى أن الحدث $R$ مكون من سبيلين .

إذن : $p(R)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{8}{15}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ .

**4)-** إذا سحبنا من الصندوق 3 كرات في آن واحد فكل سحبة ممكنة عبارة عن تأليفة ل 3 عناصر من بين 6 ،

إذن : $card\,(\Omega)=C_6^3=20$

و إذا كان $X$ هو المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة ممكنة بعدد الكرات الحمراء المكونة لها ، فإن :

$X\,(\Omega)=\{1,2,3\}$ ، و لدينا :

$$p(X=1)=\frac{C_4^1\times C_2^2}{20}=\frac{1}{5}$$

و $p(X=2)=\frac{C_4^2\times C_2^1}{20}=\frac{3}{5}$

و $p(X=3)=\frac{C_4^3}{20}=\frac{1}{5}$ ( أنشىء جدولا تحدد فيه قانون إحتمال المتغير العشوائي $X$ )

إذن : $E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$ .

## ■ تمرين03:

**1)-** معادلة ديكارتية للفلكة $(S)$ التي مركزها $\Omega(2,1,1)$ و شعاعها $r=3$ هي :

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3^2$$

أي : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z-3=0$ .

**2)-** لدينا :

$$d(\Omega,(P))=\frac{|2+2\times1-3\times1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}$$

أي : $d(\Omega,(P))=\frac{|-9|}{\sqrt{14}}=\frac{9}{\sqrt{14}}$ .

و بما أن : $\frac{3}{\sqrt{14}}\prec 1$ فإن : $d(\Omega,(P))\prec r$

إذن $(S)\cap(P)$ دائرة $(C)$ شعاعها $R$ يحقق :

$R=\sqrt{r^2-d^2}$ حيث : $d=d(\Omega,(P))$

لدينا : $R=\sqrt{9-\frac{81}{14}}=\sqrt{\frac{45}{14}}=3\sqrt{\frac{5}{14}}$ .

مركز الدائرة $(C)$ هي النقطة $H$ نقطة تقاطع المستقيم $(D)$ المار من $\Omega$ و العمودي على المستوى $(P)$ .

لدينا : $(D):\begin{cases}x=2+t\\y=1+2t\ \ /t\in\mathbb{R}\\z=1-3t\end{cases}$

و $(2+t)+2(1+2t)-3(1-3t)-10=0$

يكافيء $14t-9=0$ أي $t=\frac{9}{14}$ .

نعوض في تمثيل $(D)$ فنجد إحداثيات النقطة $H$ :

$H\left(\frac{37}{14},\frac{16}{7},-\frac{13}{14}\right)$ .

## ■ تمرين04:

**1)-** نضع $z=i\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ ، إذن :

$$P(i\alpha)=(i\alpha)^3-2(\sqrt{3}+i)(i\alpha)^2+4(1+i\sqrt{3})(i\alpha)-8i$$ ، أي :

$$P(i\alpha)=2\sqrt{3}\alpha(\alpha-2)-i\,(\alpha^3+2\alpha^2-4\alpha+8)$$

ومنه : $P(i\alpha)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha(\alpha-2)=0\\ \alpha^3-2\alpha^2-4\alpha+8=0\end{cases}$

إذن : $P(i\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=2$ .

و بالتالي فالمعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا هو $z_0=2i$ .

**2)-** نحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة من الدرجة الثانية :

$$z^2-2\sqrt{3}z+4=0$$

المميز المختصر هو : $\Delta'=(-\sqrt{3})^2-4=-1=i^2$

إذن حلي المعادلة هما :

$z_1=\sqrt{3}+i$ و $z_2=\sqrt{3}-i$ ( $\mathrm{Im}(z_2)\prec 0$ )

**3)-** لدينا :

$$z_0=\left[2,\frac{\pi}{2}\right]$$

و $z_1=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$

و $z_1-z_0=z_2=\overline{z_1}=\left[2,-\frac{\pi}{6}\right]$

و $z_2-z_0=\sqrt{3}-3i=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}i^2\right)$

إذن : $z_2-z_0=\left[2\sqrt{3},-\frac{\pi}{3}\right]$ .

**4)-** لدينا :

$$z_1-z_0=z_2-0\Leftrightarrow aff\,(\overrightarrow{AB})=aff\,(\overrightarrow{OC})$$

إذن : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$ هذا يعني أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع .

| 2 ع ت 01 + 2 ع ت 02<br>Prof : BENELKHATIR | تصحيح الإمتحان التجريبي<br>لدورة أبريل 2006 | ثانوية الفتح<br>نيابة الخميسات |
|---|---|---|

| | |
|---|---|
| و ما نيل المطالب بالتمني<br>و لكن تأخذ الدنيا غلابا<br><br>abouzakariya@yahoo.fr | و بما أن : $\overline{\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AC}\right)} = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B}\right)[2\pi]$<br>و $\frac{z_C - z_A}{z_B} = \frac{z_2 - z_0}{z_1} = \left[\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right]$<br>فإن : $\overline{\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AC}\right)} = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ .<br>إذن قطرا متوازي الأضلاع $OABC$ متعامدان<br>و بالتالي فهو معين .<br><br>abouzakariya@yahoo.fr |

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين — الإمتحان التجريبي الموحد : أبريل 2006 — مدة الإنجاز : 3 س

جهة الدارالبيضاء الكبرى — المادة : الرياضـ

المستوى : الثانية من سلك البكالوريا — المعامل : 7

الثانوية التأهيلية الحسين بن علي — الشعبة : العلوم التجريبية

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

## التمرين الأول : ( ثلاث نقط )

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط :
$A(1;1;0)$ , $B(-1;0;0)$ , $C(0;0;1)$ , $\Omega(2;-2;1)$

1) أ ـ حدد إحداثيات المتجهة : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

ب ـ تحقق أن : $x-2y-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $(ABC)$ .

ج ـ إعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم $(D)$ المار من $\Omega$ و العمودي على المستوى $(ABC)$.

2) أ ـ حدد معادلة ديكارتية للفلكة $(S)$ التي مركزها $\Omega$ و المماسة للمستوى $(ABC)$.

ب ـ حدد إحداثيات $H$ نقطة تماس الفلكة $(S)$ و المستوى $(ABC)$ .

## التمرين الثاني : ( ثلاث نقط ونصف )

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{8}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3 \end{cases}$$

1) بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ 0\le u_n\le 1$

2) أدرس رتابة $(u_n)$ ثم استنتج أنها متقاربة . ( لاحظ أن : $8u_n=\left(2\sqrt[3]{u_n}\right)^3$ )

3) نضع : $\forall n\in\mathbb{N}\quad ;\quad v_n=\sqrt[3]{u_n}-1$

أ ـ بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب ـ أكتب $v_n$ ثم $u_n$ بدلالة $n$ و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

4) نضع : $S_n=\sqrt[3]{u_0}+\sqrt[3]{u_1}+\sqrt[3]{u_2}+\cdots+\sqrt[3]{u_{n-1}}$ أحسب $S_n$ بدلالة $n$ .

## التمرين الثالث : ( أربع نقط )

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\ :\ z^2-(1+3i\sqrt{3})z-8=0$

1) أ ـ أحسب : $(3+i\sqrt{3})^2$

ب ـ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ .

ج ـ أكتب حلي المعادلة $(E)$ على الشكل المثلثي .

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطتين $A$ و $B$ لحقاهما على التوالي $z_A = 2+2i\sqrt{3}$ و $z_B = -1+i\sqrt{3}$

أ ـ تحقق أن : $\frac{z_B - z_A}{z_B} = \sqrt{3}i$ و استنتج طبيعة المثلث $OAB$ .

ب ـ حدد العدد العقدي $z_C$ لحق النقطة $C$ بحيث يكون الرباعي $OBAC$ مستطيلا .

## مسألـة : ( تسع نقط و نصف )

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \ln(e^{2x} - e^{x} + 1) \quad ; \quad x\langle 0 \\ f(x) = \sqrt{x\ln(x+1)} \quad ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

و ليكن $(C)$ ا لمنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

1) تحقق أن $f$ متصلة في $x_0 = 0$

2) أ ـ تحقق أن :

$$\begin{cases} \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(e^{2x} - e^{x} + 1)}{e^{2x} - e^{x}} \cdot e^{x} \cdot \frac{e^{x} - 1}{x} \quad ; \quad x\langle 0 \\ \frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{\ln(x+1)}{x}} \quad ; \quad x\rangle 0 \end{cases}$$

ب ـ استنتج أن $f$ قابلة للإشتقاق في $x_0 = 0$ وأن $f'(0) = 1$ .

3) أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم حدد الفروع اللانهائية للمنحنى $(C)$ .

4) أ ـ بين أن :

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{e^{x}(2e^{x} - 1)}{e^{2x} - e^{x} + 1} \quad ; \quad x\langle 0 \\ f'(x) = \frac{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}}{2\sqrt{x\ln(x+1)}} \quad ; \quad x\rangle 0 \end{cases}$$

ب ـ استنتج أن $f$ تزايدية قطعا على كل من المجالين $[-\ln 2;0]$ و $[0;+\infty[$ و تناقصية قطعا على $]-\infty;-\ln 2]$ .

5) أنشئ المنحنى $(C)$ . ( نقبل أن $(C)$ يقبل نقطة انعطاف أفصولها أصغر من $-1$ )

6) أ ـ أحسب التكامل : $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$

ب ـ استنتج حجم المجسم المولد بدوران $(C)$ حول محور الأفاصيل دورة كاملة على المجال $[0;1]$ .
( استعمل المكاملة بالأجزاء )

7) ليكن $h$ قصور الدالة $f$ على المجال $I = [-\ln 2;0]$

أ ـ بين أن $h$ تقابل من $I$ نحو مجال $J$ يجب تحديده .

ب ـ حدد $h^{-1}(x)$ لكل $x$ من $J$ . .

R

**التمرين الأول:**

1) أ- $\overrightarrow{AB}(-2;-1;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;-1;1)$ إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -1 & -1\end{vmatrix}\right)$ أي
$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1;-2;-1)$

ب- بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى $(ABC)$ فإن ، $(ABC): x-2y-z+e=0$. و بما أن $C\in(ABC)$ فإن $-1+e=0$ أي $e=1$ و منه فإن $x-2y-z+1=0$ معادلة ديكارتية للمستوى $(ABC)$.

ج- بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى $(ABC)$ فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهة موجهة للمستقيم $(D)$ إذن تمثيل بارامتري للمستقيم $(D)$ هو : $(D):\begin{cases}x=2+t\\ y=-2-2t\ (t\in\mathbb{R})\\ z=1-t\end{cases}$

2)أ- شعاع الفلكة $(S)$ هو :

$$\begin{aligned}R&=d\left(\Omega,(ABC)\right)\\&=\frac{|2-(2\times2)-1+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}}\\&=\frac{2\sqrt{6}}{6}\end{aligned}$$

إذن : $(S):(x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)=\left(\frac{2\sqrt{6}}{6}\right)^2$ أي $(S): x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z+\frac{25}{3}=0$

**التمرين الثاني**

1) نضع $P(n): 0\le u_n\le 1$

لدينا $0\le u_0\le 1$ أي $P(0)$ عبارة صحيحة

نفرض أن $P(n)$ عبارة صحيحة لكل عدد صحيح طبيعي أصغر من أو يساوي $n$

لدينا حسب الفرضية السابقة :

$$\begin{aligned}0\le u_n\le 1&\Leftrightarrow 0\le\sqrt[3]{u_n}\le 1\\&\Leftrightarrow 1\le 1+\sqrt[3]{u_n}\le 2\\&\Leftrightarrow 1\le\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3\le 8\\&\Leftrightarrow \frac{1}{8}\le\frac{1}{8}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3\le 1\\&\Leftrightarrow \frac{1}{8}\le u_{n+1}\le 1\end{aligned}$$

أي $0\le u_{n+1}\le 1$. إذن لكل $n$ من $\mathbb{N}$ ، $0\le u_n\le 1$

2) لكل $n$ من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{8}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3-u_n$$
$$=\frac{\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3-8u_n}{8}$$
$$=\frac{\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3-\left(2\sqrt[3]{u_n}\right)^3}{8}$$
$$=\frac{\left(1+\sqrt[3]{u_n}-2\sqrt[3]{u_n}\right)\left(\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^2+2\sqrt[3]{u_n}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)+\left(2\sqrt[3]{u_n}\right)^2\right)}{8}$$
$$=\frac{\left(1-\sqrt[3]{u_n}\right)\left(\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^2+2\sqrt[3]{u_n}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)+\left(2\sqrt[3]{u_n}\right)^2\right)}{8}$$

إشارة $u_{n+1}-u_n$ هي إشارة $1-\sqrt[3]{u_n}$. و بما أن $0\le u_n\le 1$ فإن $\sqrt[3]{u_n}\le 1$ وبالتالي لكل $n$ من $\mathbb{N}$ $u_{n+1}-u_n\ge 0$
أي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية .

خلاصة: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية و مكبورة فهي إذن متقاربة.

3)أ- لكل $n$ من $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1}=\sqrt[3]{u_{n+1}}-1$$
$$=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3}-1$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)-1$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt[3]{u_n}-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(v_n)$$

إذن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب- لكل $n$ من $\mathbb{N}$:

$$v_n=v_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=-1\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

من العلاقة $\forall n\in N; v_n=\sqrt[3]{u_n}-1$ نستنتج أن $u_n=(v_n+1)^3=\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right)^3$ .

$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right)^3=1$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

(4

$$S=\sqrt[3]{u_0}+\sqrt[3]{u_1}+\sqrt[3]{u_2}+.......+\sqrt[3]{u_{n-1}}$$
$$=\left(v_0+1\right)+\left(v_1+1\right)+\left(v_2+1\right)+......+\left(v_{n-1}+1\right)$$
$$=n+\left(v_0+v_1+v_2+.....+v_{n-1}\right)$$
$$=n+v_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)$$
$$=n-2\left(1-\frac{1}{2}^n\right)$$

## التمرين الثالث

1) أ- $\left(3+i\sqrt{3}\right)^2=9+6i\sqrt{3}-3=6+6i\sqrt{3}$

ب-

$$\Delta=\left(1+3i\sqrt{3}\right)^2+32$$
$$=1+6i\sqrt{3}-27+32$$
$$=6+6i\sqrt{3}$$

إذن $3+i\sqrt{3}$ هو أحد الجذور المربعة للعدد العقدي $\Delta$. $z_1=\dfrac{\left(1+3i\sqrt{3}\right)+\left(3+i\sqrt{3}\right)}{2}=2+2i\sqrt{3}$

$$z_1=\frac{\left(1+3i\sqrt{3}\right)-\left(3+i\sqrt{3}\right)}{2}=-1+i\sqrt{3}$$

ج- $|z_1|=4$ ، $\arg(z_1)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ إذن $z_1=\left[4,\dfrac{\pi}{3}\right]$

$|z_2|=2$ ، $\arg(z_2)\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ إذن $z_1=\left[2,\dfrac{2\pi}{3}\right]$

2) أ-

$$\frac{z_B-z_A}{z_B}=\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)-\left(2+2i\sqrt{3}\right)}{-1+i\sqrt{3}}$$
$$=\frac{3+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{4}$$
$$=\frac{3+3i\sqrt{3}+i\sqrt{3}-3}{4}$$
$$=i\sqrt{3}$$

بما أن $\frac{z_B - z_A}{z_B}$ عدد تخيلي صرف $\left(\sqrt{3} \in \mathbb{R}_+^*\right)$ فأن $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ و نعلم أن

$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B}\right) \equiv \overline{\left(\overrightarrow{BO}, \widehat{\overrightarrow{BA}}\right)}[2\pi]$ أي $OAB$ مثلث قائم الزاوية في الرأس $B$

ب- $OAB$ مثلث قائم الزاوية في $B$ ، إذن كي يكون $OBAC$ مستطيل يكفي أن يكون $OBAC$ متوازي الأضلاع أي $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$ و بما أن $\overrightarrow{BA}\left(3; \sqrt{3}\right)$ فإن $C\left(3; \sqrt{3}\right)$ إذن $z_C = 3 + i\sqrt{3}$

## مسألة

1) لدينا $f(0) = \sqrt{0 \times \ln(0+1)} = 0$ .

و بما أن

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \ln(e^{2x} - e^x + 1)\\ &= \ln(1-1+1)\\ &= 0\\ &= f(0)\end{aligned}$$

فإن الدالة $f$ متصلة في 0

2)أ- الجواب في متناول الجميع

ب-

$$\begin{aligned}f_g'(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)}{e^{2x} - e^x} \times e^x \times \frac{e^x - 1}{x}\\ &= 1\end{aligned}$$

لأن $\left( f_g'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)}{e^{2x} - e^x} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \right)$ و $\left( \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \right)$

$$\begin{aligned}f_d'(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}}\\ &= 1\end{aligned}$$

بما أن $f_g'(0) = f_d'(0) = 1$ فإن الدالة $f$ قابلة للإشتقاق في 0 و $f'(0) = 1$ .

3) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right) = 0$ ، $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x\ln(x+1)} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}\times\frac{(x+1)}{x}}$$
$$=0$$

لأن $\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=\lim_{h\to+\infty}\frac{\ln(h)}{h}=0\right)$ و $\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1\right)$

<u>خلاصة</u>: بما أن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ فإن المستقيم $\boxed{y=0}$ مقارب أفقي لمنحنى الدالة $f$ بجوار $-\infty$.

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ فإن منحنى الدالة $f$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محر الأفاصيل .

4)أ-

- لكل $x\prec 0$ لدينا :

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}$$
$$=\frac{2\left(e^{x}\right)^{2}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}$$
$$=\frac{e^{x}\left(2e^{x}-1\right)}{e^{2x}-e^{x}+1}$$

لاحظ أن الصيغ $e^{x}$ و $e^{2x}-e^{x}+1$ موجبة قطعا على $]-\infty;0[$ إذن إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;0[$ هي إشارة العدد $2e^{x}-1$ ( $2e^{x}-1$ تنعدم عند $x=-\ln 2$ )

- لكل $x\succ 0$ لدينا :

$$f'(x)=\frac{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}{2\sqrt{x\ln(x+1)}}$$

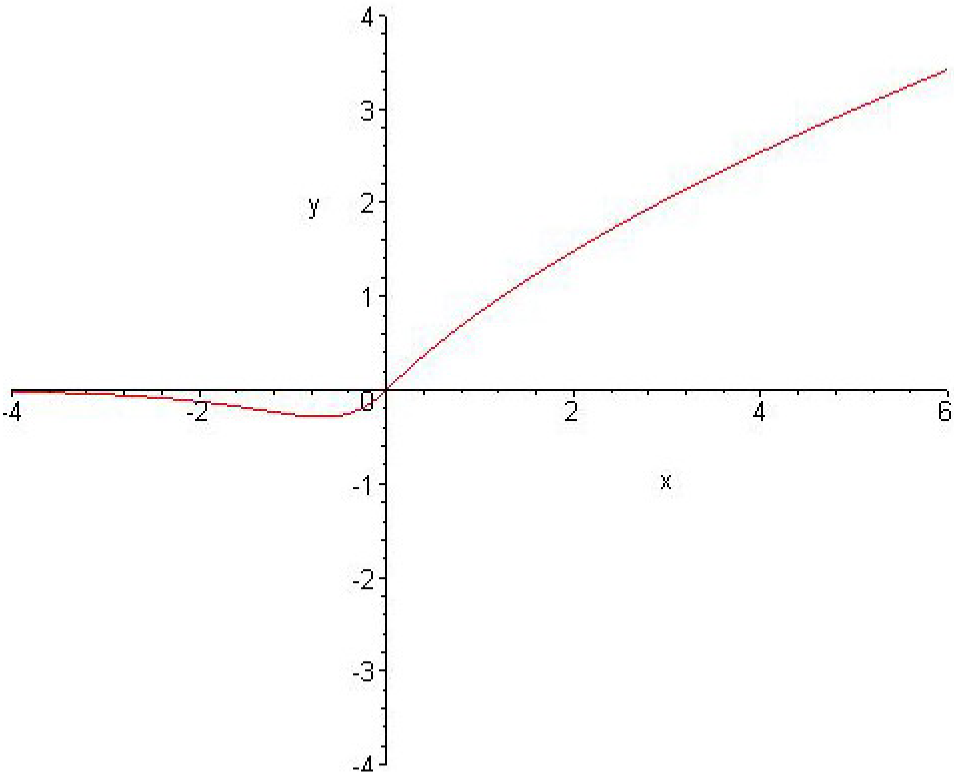
لاحظ أن لكل $x\succ 0$ ، $x+1\succ 1$ أي $\ln(x+1)\succ 0$ و بالتالي

$\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}\succ 0$ أي $f'(x)\succ 0$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$.

ب-

| $x$ | $-\infty$ | | $-\ln 2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $1$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $\ln\frac{3}{4}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

(5




6) أ-

لكل $x$ من المجال $[0;1]$ لدينا :

$$\frac{x^2}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}=(x-1)+\frac{1}{x+1}$$

إذن :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1 (x-1)+\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{2}+\ln(2)$$

ب- الحجم المطلوب هو :

$$V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1 x\ln(x+1)\,dx$$

نضع: $u(x)=\ln(x+1)$ $\quad u'(x)=\dfrac{1}{x+1}$

$v(x)=\dfrac{x^2}{2}$ $\quad v'(x)=x$

إذن :

$$V=\pi\left(\left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx\right)$$
$$=\pi\left(\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\ln(2)\right)\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}$$

(7

أ- الدالة $h$ متصلة و تزايدية قطعا على المجال $I=[-\ln 2;0]$ إذن فهي تقابل من $I$ نحو المجال $J=h(I)=\left[\ln\left(\dfrac{3}{4}\right);0\right]$ وتقبلدالة عكسية من $J$ نحو $I$ :

$$h^{-1}:J\to I$$
$$x\mapsto h^{-1}(x)=y$$

لكل $x$ من $J$ و لكل $y$ من $I$ لدينا :

$$h^{-1}(x)=y\Leftrightarrow x=h(y)$$
$$\Leftrightarrow x=\ln\left(e^{2y}-e^y+1\right)$$
$$\Leftrightarrow e^x=e^{2y}-e^y+1$$
$$\Leftrightarrow \left(e^y\right)^2-\left(e^y\right)+\left(1-e^x\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(e^y-\frac{1+\sqrt{4e^x-3}}{2}\right)\left(e^y-\frac{1-\sqrt{4e^x-3}}{2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow e^y=\frac{1+\sqrt{4e^x-3}}{2}$$

إذن : $y=\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{4e^x-3}}{2}\right)$

## نيابة فاس الجديد دار دبيبغ — امتحان تجريبي (علوم تجريبية)

**التمرين الأول (7.5 ن)**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \frac{x}{3} - \sqrt[3]{1+x}, (x \geq 0) \\ f(x) = \ln\left(e^{-x} + x^2\right), (x \prec 0) \end{cases}$$

1) بين أن $f$ متصلة في الصفر (0.5 ن)

2) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ( 1 ن)

3) أ- أثبت أن : $(\forall x \in ]-\infty;0[) : f(x) = -x + \ln\left(1 + x^2 e^x\right)$ (0.5 ن)

ب- استنتج أن $\left(C_f\right)$ منحنى الدالة $f$ يقبل المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y = -x$ كمقارب مائل بجوار $-\infty$ (0.25 ن)

ج- حدد موقع $\left(C_f\right)$ بالنسبة لمقاربه $(\Delta)$ عندما يكون $x \prec 0$ . ( 0.5 ن)

د- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ (0.5 ن)

4) ادرس قابلية اشتقاق $f$ في الصفر على اليمين و على اليسار ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة . (1.5 ن)

( تذكير : $\sqrt[3]{a} - 1 = \frac{a-1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1}$ و $\lim_{h\mapsto 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ )

5) لتكن $f'$ الدالة المشتقة الأولى للدالة $f$ . بين أن : ( 0.75 ن)

$$\begin{cases} (\forall x \succ 0) : f'(x) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}\right) \\ (\forall x \prec 0) : f'(x) = \frac{2xe^x - 1}{x^2 e^x + 1} \end{cases}$$

6) ضع جدول تغيرات الدالة $f$ ( 0.5 ن)

7) أنشئ $\left(C_f\right)$ في معلم متعامد ممنظم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ( 1 ن)

8) أ- حدد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$ على المجال $[0, +\infty[$ التي تنعدم في الصفر ( 0.5 ن)

ب- احسب التكامل $I = \int_0^7 \left(\sqrt[3]{1+x} - 1\right) dx$ ثم استنتج مساحة الحيز المحصور بين المنحنى $\left(C_f\right)$ و المستقيمات ذات المعادلات $x = 0$ و $x = 7$ و $y = \frac{x}{3}$ ( سؤال إضافي )

**التمرين الثاني ( 3 ن)**

في الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط $A(5;-1;2)$ و $B(1;-3;-2)$ و $C(-2;-1;2)$ .

1) احسب $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ ثم استنتج مساحة المثلث $ABC$ ( 0.75 ن)

2) احسب $\left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}}\right)\right|$ ( 0.5 ن)

3) احسب مسافة النقطة **B** عن المستقيم $(AC)$ (0.75 ن)

4) حدد تقاطع المستوى $(ABC)$ و الفلكة التي أحد أقطارها $[AB]$ ( 1 ن )

**التمرين الثالث (3.5 ن)**

يحتوي كيس على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 3 كرات حمراء . نسحب عشوائيا و تآنيا 3 كرات من الكيس .
نفترض أن جميع الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس .

1) حدد كون الإمكانيات $\Omega$ و احسب $card\Omega$ (0.5 ن)

2) أ- احسب احتمال الحدثين : (0.75 ن)
**A** " الحصول على 3 كرات من نفس اللون " **B** "الحصول على الأقل على كرة حمراء "

ب- هل الحدثان **A** و **B** مستقلان ؟ علل جوابك . (0.5 ن)

3) ليكن **X** المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .
حدد قانون احتمال **X** . (1.25 ن)

4) نعيد التجربة السابقة 5 مرات .
احسب احتمال الحصول على كرات من نفس اللون مرتين بالضبط. (0.5 ن)

**التمرين الرابع (3 ن)**

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): z^2-\left(1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)z+i+\sqrt{3}=0$

1) أ- بين أن المعادلة $(E)$ تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0$ يجب تحديده . (0.5 ن)

ب- استنتج الحل الثاني للمعادلة $(E)$. (0.5 ن)

2) لتكن النقط **A** و **B** و **C** ألحاقها على التوالي هي : $z_A=1+i$ و $z_B=i$ و $z_c=1-i\sqrt{3}$

أ- اكتب $z_A$ و $z_B$ و $z_C$ على الشكل المثلثي . (0.75 ن)

ب- حدد قياسا للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ (0.5 ن)

3) حدد مجموعة النقط **M** ذات اللحق $z$ بحيث : $\left|z-1+i\sqrt{3}\right|=\left|z-1-i\right|$ (0.75 ن)

**التمرين الخامس ( 3 ن )**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases}(\forall n\in\mathbb{N}): u_{n+1}=2u_n-1\\ u_0=2\end{cases}$$

1) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}): u_n \succ 1$ (0.5 ن)

2) نضع $(\forall n\in\mathbb{N}): v_n=u_n-1$

أ- بين ان $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية و حدد أساسها و حدها الأول $v_0$ ( 1 ن)

ب- نضع $(\forall n\in\mathbb{N}): w_n=\ln(v_n)$
بين أن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية . (0.5 ن)

ج- احسب $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{w_n}{v_n}\right)$ ( 1 ن)

Sajid mohammed sajid@madariss.fr www.madariss.fr

## نيابة فاس الجديد دار دبيبغ امتحان تجريبي (علوم تجريبية )

التمرين الأول

**-1**

$f(0)=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}\ln(e^{-x}+x^2)=0$ أي $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}} f(x)=f(0)$ إذن f متصلة في 0

**-2**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{3}-\sqrt[3]{1+x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln(e^{-x}+x^2)$$
$$=+\infty$$
شكل محدد

**-3**

-أ

$$\forall x\in\left]-\infty,0\right[: f(x)=\ln(e^{-x}+x^2)$$
$$=\ln\left(e^{-x}\left(1+x^2e^x\right)\right)$$
$$=\ln\left(e^{-x}\right)+\ln\left(1+x^2e^x\right)$$
$$=-x+\ln\left(1+x^2e^x\right)$$

-ب

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+x^2e^x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+4\left(\left(\frac{x}{2}\right)e^{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2\right)=0$ فإن المستقيم $\boxed{y=-x}$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

-ج

لكل $x\prec 0$ لدينا : $f(x)-(-x)=\ln\left(1+x^2e^x\right)\succ 0$ ( لأن $1+x^2e^x\succ 1$ ) أي $f(x)\succ -x$ إذن $C_f$ فوق المقارب المائل $y=-x$ .

-د

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{1}{3}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\frac{x}{3}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\sqrt[3]{1+x}=-\infty$

إذن منحنى الدالة يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم $y=\frac{x}{3}$ بجوار

**-4**

بما أن :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{1+\frac{x}{3}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{\frac{x}{3}-\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)}{x}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{\frac{x}{3}-\frac{1+x-1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}}{x}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{\frac{x}{3}-\frac{x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}}{x}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}$$
$$=0$$

فإن **f** قابلة للاشتقاق على يمين 0 و $f_d'(0)=0$ **.** منحنى الدالة **f** يقبل نصف مماس موازي لمحور الأفاصيل على يمين الصفر.

بما أن :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}\frac{\ln(e^{-x}+x^2)}{x}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}\frac{\ln\left(e^{-x}\right)+\ln\left(1+x^2e^{x}\right)}{x}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}-1+\frac{\ln\left(1+x^2e^{x}\right)}{x^2e^{x}}\times xe^{x}$$
$$=-1$$

فإن **f** قابلة للاشتقاق على يسار 0 و $f_g'(0)=-1$ . منحنى الدالة **f** يقبل نصف مماس على يسار الصفر معامله الموجه هو $-1$

**-5**

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right): f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1+x)^{\frac{1}{3}-1}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-(1+x)^{\frac{-2}{3}}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}\right)$$

لاحظ أنه لكل $x\succ 0$ ، $\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}\prec 1$ أي

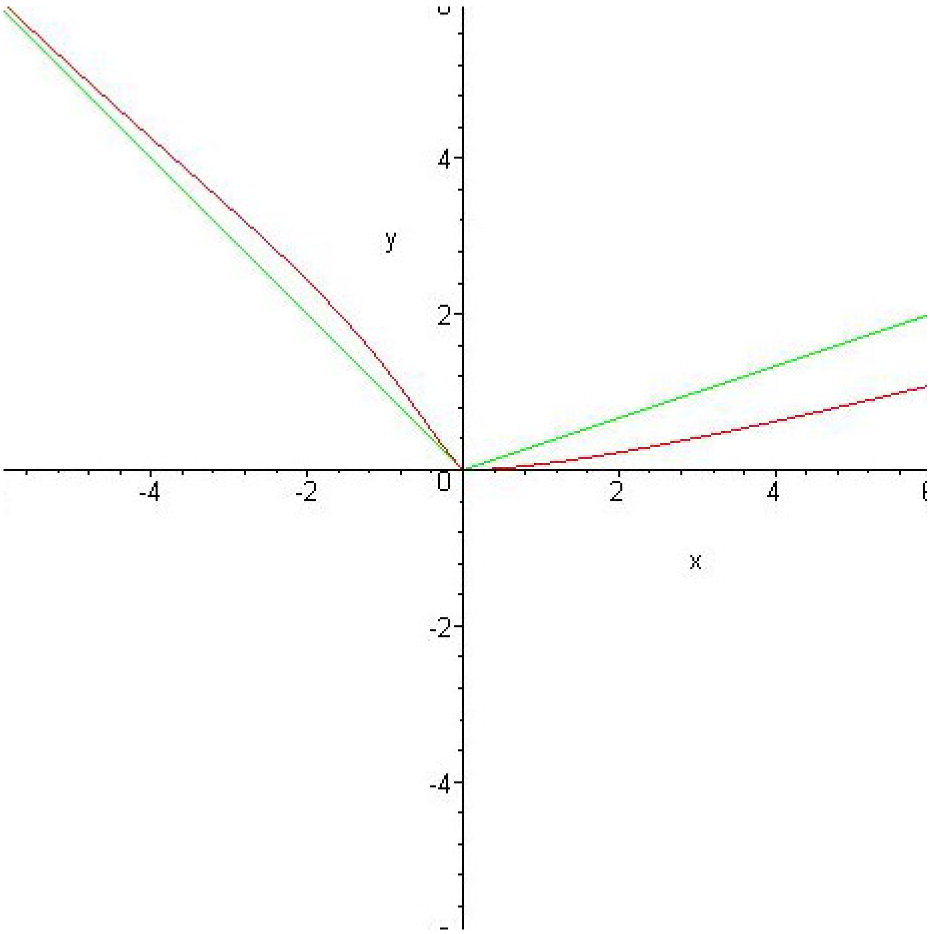
$$\left(\forall x\in\mathbb{R}_-^*\right): f'(x)=\frac{-e^{-x}+2x}{e^{-x}+x^2}$$
$$=\frac{-e^{-x}.e^{x}+2x.e^{x}}{e^{-x}.e^{x}+x^2.e^{x}}$$
$$=\frac{-1+2x.e^{x}}{1+x^2.e^{x}}\prec 0$$

. $f'(x) \succ 0$

**-6**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f'(x)$ | | 0 | | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$ | $-1$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | | 0 | ↗ | $+\infty$ |

**-7**




**-8**

أ- دالة أصلية للدالة $x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$ هي الدالة $x \mapsto \frac{3}{4}(1+x)\sqrt[3]{1+x}+k$ $(k \in \mathbb{R})$

دالة أصلية للدالة $x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$ و تنعدم في الصفر هي الدالة $x \mapsto \frac{3}{4}(1+x)\sqrt[3]{1+x}-\frac{3}{4}$

ب-

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^7 \left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)dx \\
&= \left[\frac{3}{4}(1+x)\sqrt[3]{1+x}-\frac{3}{4}-x\right]_0^7 \\
&= \frac{17}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^7 \left|f(x)-\frac{x}{3}\right|dx \\
&= \int_0^7 \left|1-\sqrt[3]{1+x}\right|dx \\
&= \int_0^7 \left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)dx \\
&= \frac{17}{4}
\end{aligned}
$$

**التمرين الثاني (3 ن)**

**-1**

$\overrightarrow{AB}(-4;-2;-4)$ و $\overrightarrow{AC}(-7;0;0)$ إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -4 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-4 & 0\\ -4 & -7\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-4 & -7\\ -2 & 0\end{vmatrix}\right)$ أي

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(0;28;-14)$

مساحة المثلث $ABC$ هي

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0^2+28^2+(-14)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{784+196} \\
&= 7\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

**-2**

$$
\begin{aligned}
\left|\sin\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{\wedge}\,\overrightarrow{AC}\right)\right| &= \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} \\
&= \frac{14\sqrt{5}}{6\times 7} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{3}
\end{aligned}
$$

**-3**

$$d\left(B,(AC)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|AC\right\|}$$
$$=\frac{14\sqrt{5}}{7}$$
$$=2\sqrt{5}$$

**-4**

بما $[AB]\subset(ABC)$ فإن $\Omega$ منتصف القطعة $[AB]$ أي مركز الفلكة ينتمي إلى المستوى $(ABC)$ إذن $d\left(\Omega,(ABC)\right)=0\prec\frac{AB}{2}$ و عليه فإن الفلكة تقطع المستوى وفق دائرة كبرى مركزها $\Omega$ و شعاعها $\frac{AB}{2}$

التمرين الثالث (3.5 ن)

**-1**

كون الامكانيات يتكون من تأليفات ل 3 كرات من بين 10 كرات

$$card\Omega=C_{10}^{3}$$
$$=\frac{10!}{3!\times7!}$$
$$=\frac{8\times9\times10}{6}$$
$$=120$$

**-2**

أ-

احتمال الحدث **A** :

$$P(A)=\frac{cardA}{card\Omega}$$
$$=\frac{C_3^3+C_4^3+C_3^3}{120}$$
$$=\frac{1+4+1}{120}$$
$$=\frac{1}{20}$$

احتمال الحدث **B** :

$$P(B)=1-\frac{C_7^3}{120}$$
$$=\frac{85}{120}$$

ب-

$A\cap B$ : "الحصول على 3 كرات حمراء " $\quad P\left(A\cap B\right)=\frac{C_3^3}{120}=\frac{1}{120}$

الحدثان غير مستقلين لأن $P\left(A\cap B\right)\neq P(A)\times P(B)$

**-3**

Sajid mohammed sajid@madariss.fr www.madariss.fr

$$X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$$

$$P(x=0)=\frac{C_7^3}{120}=\frac{35}{120}$$

$$P(x=1)=\frac{C_3^1\times C_7^2}{120}=\frac{3\times 21}{120}=\frac{63}{120}$$

$$P(x=2)=\frac{C_3^2\times C_7^1}{120}=\frac{3\times 7}{120}=\frac{21}{120}$$

$$P(x=0)=\frac{C_3^3}{120}=\frac{1}{120}$$

**-4**

$$P=C_5^2\times\left(P(A)\right)^2\left(1-P(A)\right)^3$$

$$=C_5^2\times\left(\frac{1}{20}\right)^2\left(\frac{19}{20}\right)^3$$

التمرين الرابع ( 3 ن )

**-1**

أ- المعادلة $(E)$ تقبل حلا تخيليا صرفا $\alpha i$ يعني :

$(\alpha i)^2-\left(1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)(\alpha i)+i+\sqrt{3}=0$ تعني $\left(-\alpha^2+\alpha\left(1-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\right)+(1-\alpha)i=0$ تعني

$1-\alpha=0$ و $\left(-\alpha^2+\alpha\left(1-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\right)=0$ أي $\alpha=1$

إذن $(E)$ تقبل حلا تخيليا صرف و هو $z_0=i$ .

ب- ليكن $z_1$ الحل الثاني للمعادلة $(E)$:

لدينا $z_0+z_1=1+i\left(1-\sqrt{3}\right)$ أي $z_1=1+i\left(1-\sqrt{3}\right)-i=1-i\sqrt{3}$

-2

أ-

$z_A=1+i=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$ $\quad z_B=i=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$ $\quad z_C=1-i\sqrt{3}=\left[2,-\frac{\pi}{3}\right]$

ب-

$$\overline{\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)}\equiv\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$$

$$\equiv\arg\left(i\left(\sqrt{3}+1\right)\right)[2\pi]$$

$$\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

**-3**

$\left|z-1+i\sqrt{3}\right|=\left|z-1-i\right| \Leftrightarrow \left|z-z_C\right|=\left|z-z_A\right|$ أي $MC=MA$ إذن مجموعة النقط **M** هو واسط القطعة $[AC]$

3

التمرين الخامس ( 3 ن )

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases}(\forall n\in\mathbb{N}): u_{n+1}=2u_n-1\\ u_0=2\end{cases}$$

**-1**

البرهان بالترجع:

لدينا $u_0 \succ 1$ حسب معطيات التمرين

نفترض أنه توجد رتبة $n_0$ من $\mathbb{N}$ حيث : $\forall n\leq n_0 : u_n \succ 1$

$$\forall n\leq n_0 : u_n \succ 1 \Leftrightarrow \forall n\leq n_0 : 2u_n \succ 2$$

لدينا $\Leftrightarrow \forall n\leq n_0 : 2u_n-1 \succ 1$

$$\Leftrightarrow \forall n\leq n_0 : u_{n+1} \succ 1$$

وعلية فإن $\forall n\in\mathbb{N} : u_n \succ 1$

**-2**

أ-

$$\begin{aligned}(\forall n\in\mathbb{N}): v_{n+1} &= u_{n+1}-1\\ &= 2u_n-2\\ &= 2(u_n-1)\\ &= 2v_n\end{aligned}$$

إذن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 2 و $v_0=u_0-1=1$

الحد العام $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=2^n$

ب-

$$\begin{aligned}(\forall n\in\mathbb{N}): w_{n+1}-w_n &= \ln(v_{n+1})-\ln(v_n)\\ &= \ln\left(\frac{u_{n+1}-1}{u_n-1}\right)\\ &= \ln\left(\frac{2u_n-1-1}{u_n-1}\right)\\ &= \ln\left(\frac{2(u_n-1)}{(u_n-1)}\right)\\ &= \ln 2\end{aligned}$$

إذن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها $\ln 2$ و $w_0=\ln(v_0)=0$

الحد العام : $\forall n\in\mathbb{N}, w_n=n\ln 2=\ln 2^n$

ج-

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{w_n}{v_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n}\ln 2$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(n\frac{\ln 2}{2}\right)^2}{\left(e^{n\frac{\ln 2}{2}}\right)^2}\times\frac{4}{\ln 2}$$

$$= \lim_{h\to+\infty} \left(\frac{h}{e^h}\right)^2\times\frac{4}{\ln 2}$$

$$= 0$$

R

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| الامتحـــان التجريبي للبكالوريـــــا 25 مارس 2008 | الأستاذ : محمد الحيان | | النيابـــة : ورزازات | |
| | المادة : الرياضيـــــــات | | مدة الانجاز : 3 ساعات | |
| | الشعبة : الثانية بكالوريا علوم فيزيائية الثانية بكالوريا علوم الحياة والأرض | | المعامـل : 7 | |



## التمريـــــــــن الأول: 3,5 ن

0,5 — 1. أ- بين أن : $\dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}=2x+1+\dfrac{1}{x+1} \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ .

1 — ب- استنتج قيمة التكامل : $I=\int_0^1\left(\dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}\right)dx$

1 — 2. باستعمال المكاملة بالأجزاء ، أحسب التكامل التالي : $J=\int_0^1 xe^{-x}dx$

1 — 3. أحسب التكامل : $K=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\dfrac{1}{x}\left|\ln(x)\right|dx$

## التمريـــــــــن الثانـــــــــي: 6 نقط

لكل $z$ من المجموعة $\mathbb{C}$، نضع : $P(z)=z^3-(8+3i)z^2+(25+24i)z-75i$

0,75 — 1. حل في المجموعة ، المعادلة التالية : $(E) \quad : \quad z^2-8z+25=0$

0,75 — 2. بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا $z_0$ صرفا يجب تحديده.

0,5 — 3. حدد العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث : $\forall z\in\mathbb{C} \quad : \quad P(z)=(z-3i)(z^2+az+b)$

4. نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ التي ألحاقها على التوالي هي : $z_A=-1+2i$ و $z_B=4+3i$ و $z_C=3i$ و $z_D=4-3i$ .

0,5 — أ- مثل النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$.

1 — ب- بين أن : $\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\dfrac{1}{5}i$ و أن : $\dfrac{z_C-z_B}{z_D-z_B}=-\dfrac{2}{3}i$ .

1 — جـ- استنتج طبيعة المثلثين $ACD$ و $BCD$ .

1 — د- بين أن النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ تنتمي إلى دائرة $(\Gamma)$ محددا شعاعها ولحق مركزها.

0,5 — 5. نعتبر الإزاحة $t$ التي متجهتها $\overrightarrow{AD}$ . حدد لحق النقطة $E$ صورة النقطة $C$ بالإزاحة $t$ .

R

## التمريـــــــــــــــن الثالـــــــــــــــث: 10,5 ن

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\ln(1-x^3) & ; \quad x<0 \\ f(x)=4x\sqrt{x}-3x^2 & ; \quad x\geq 0 \end{cases}$$

وليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوى $\mathscr{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ - بين أن $f$ متصلة في النقطة 0 . — 0,5

ب- بين أن الدالة $f$ قابلة للإشتقاق في النقطة 0 . ( نذكر بأن : $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$ ) — 1

2. بين أن الدالة تناقصية على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $[1,+\infty[$ ، وتزايدية على المجال $[0,1]$ . — 1,5

3. أ- أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ . — 1

ب- تحقق من أن : $\frac{f(x)}{x}=\frac{3\ln(-x)}{x}+\frac{\ln(1-x^{-3})}{x} \quad ; \quad \forall x\in]-\infty,0[$ . — 0,5

جـ أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ . — 1

4. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ . — 1

5. ليكن $h$ قصور الدالة $f$ على المجال $]-\infty,0[$ .

أ- بين أن $h$ تقبل دالة عكسية $h^{-1}$ معرفة على مجال $J$ يتم تحديده. — 0,5

ب- حدد $h^{-1}(x)$ لكل $x$ من المجال $J$ . — 1

6. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\frac{4}{9} \\ u_{n+1}=4u_n\sqrt{u_n}-3u_n^2 & ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين بالترجع أن : $\frac{4}{9}\leq u_n\leq 1 \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}$ . — 0,75

ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية . — 0,75

جـ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ، ثم أحسب نهايتها. — 1

## التمرين الأول :

1. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$ . لدينا : $2x+1+\frac{1}{x+1}=\frac{(2x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{2x^2+2x+x+1+1}{x+1}=\frac{2x^2+3x+2}{x+1}$ .

ب- لدينا : $\int_0^1\frac{2x^2+3x+2}{x+1}dx=\int_0^1 2x+1+\frac{1}{x+1}dx=\left[x^2+x+\ln(|x+1|)\right]_0^1=\boxed{2+\ln 2}$ .

2. باستعمال المكاملة بالأجزاء ، نجد :

$$J=\int_0^1 xe^{-x}dx=\int_0^1 x\left(-e^{-x}\right)'dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 x'\left(e^{-x}\right)dx$$

$$J=-e^{-1}-\int_0^1 -e^{x}dx=-e^{1}-\left[e^{-x}\right]_0^1=-e^{-1}-\left(e^{-1}-1\right)=\boxed{1-\frac{2}{e}}$$

3. لنحدد إشارة $\ln x$ على المجال $\left[\frac{1}{e},e\right]$ . لدينا :

| $x$ | $0$ $\quad\frac{1}{e}\quad$ $1$ $\quad e\quad$ $+\infty$ |
| --- | --- |
| $\ln x$ | $\|$ $\quad - \quad$ $0$ $\quad + \quad$ |

باستعمال علاقة شال ، نحصل على ما يلي :

$$K=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}|\ln x|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}|\ln(x)|dx+\int_1^e\frac{1}{x}|\ln(x)|dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}\ln(x)dx+\int_1^e\frac{1}{x}\ln(x)dx$$

$$=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}(\ln(x))'\ln(x)dx+\int_1^e(\ln(x))'\ln(x)dx$$

$$K=-\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=-\left(0-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-0\right)=\boxed{1}$$

## التمرين الثاني :

لكل $z$ من $\mathbb{C}$ ، نضع : $P(z)=z^3-(8+3i)z^2+(25+24i)z-75i$ .

1. لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E)\ :\ z^2-8z+25=0$ .

لدينا : $\Delta'=b'^2-ac=(-4)^2-1\times25=16-25=-9=(3i)^2$ . إذن : للمعادلة $(E)$ حلين عقديين مترافقين هما :

$z_1=\frac{-b'+i\sqrt{-\Delta'}}{a}=4+3i$ و $z_2=\frac{-b'-i\sqrt{-\Delta'}}{a}=4-3i$ .

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة $(E)$ هي : $S=\{4-3i\ ,\ 4+3i\}$ .

2. ليكن $z_0=iy$ بحيث $y\in\mathbb{R}$ ، حلا تخيليا صرفا للمعادلة $P(z)=0$ . إذن :

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow z_0^3-(8+3i)z_0^2+(25+24i)z_0-75i=0$$
$$\Leftrightarrow (iy)^3-(8+3i)(iy)^2+(25+24i)(iy)-75i=0$$
$$\Leftrightarrow (8y^2-24y)+i(-y^3+3y^2+25y-75)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8y^2-24y=0 \\ -y^3+3y^2+25y-75=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8y(y-3)=0 \\ -y^3+3y^2+25y-75=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \text{ أو } y=3 \\ -y^3+3y^2+25y-75=0 \end{cases}$$
$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow \boxed{y=3}$$

وبالتالي فإن $\boxed{z_0=3i}$ هو حل تخيلي صرف للمعادلة $P(z)=0$ .

3. لدينا $z_0=3i$ جذر للحدودية $P(z)$. إذن $P(z)$ تقبل القسمة على $z-3i$ .

**طريقة 1 :** القسمة الأقليدية.

$$\begin{array}{r|l} P(z)=z^3-(8+3i)z^2+(25+24i)z-75i & z-3i \\ \hline -\quad z^3 - 3iz^2 \qquad\qquad & z^2-8z+25 \\ -8z^2+(25+24i)z-75i & \\ -\quad -8z^2+24iz \qquad & \\ 25z-75i & \\ -\quad 25z-75i & \\ 0 \quad 0 & \end{array}$$

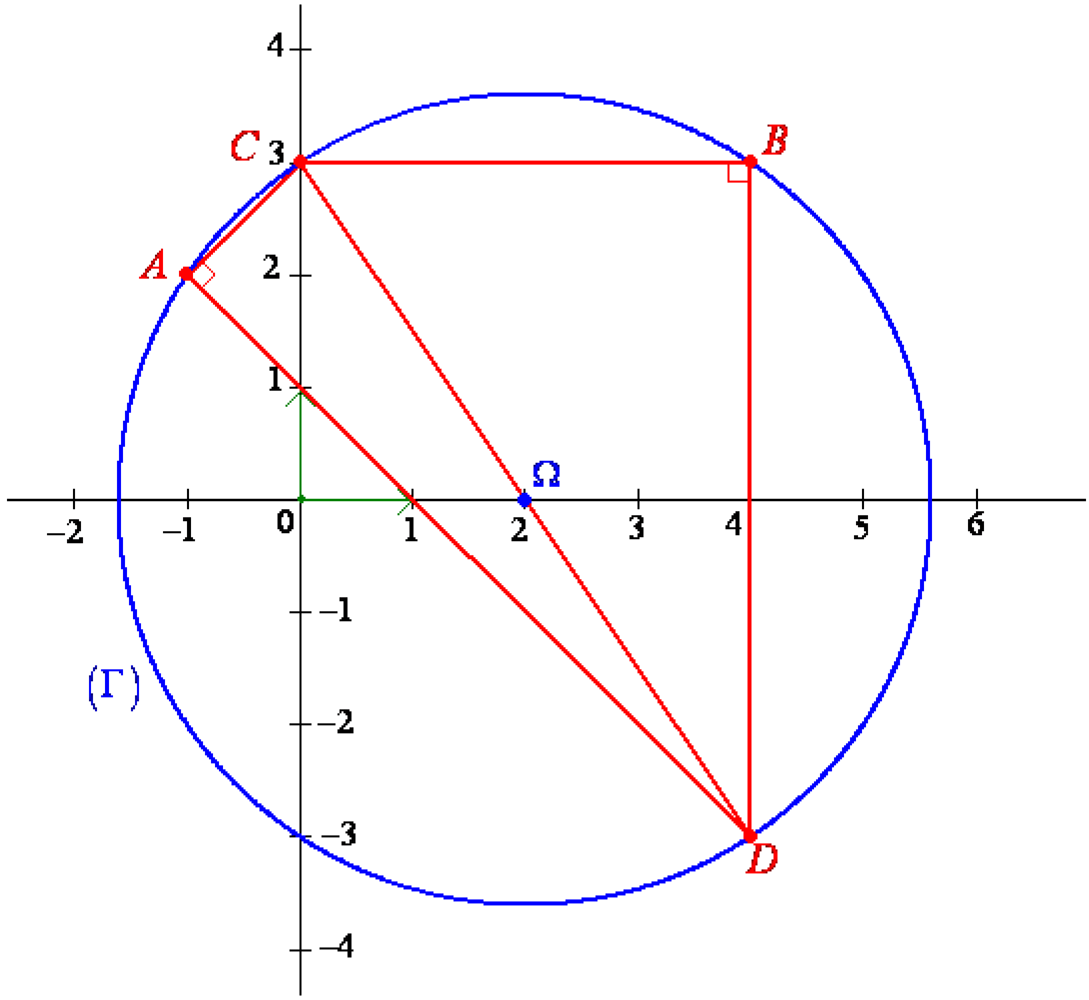
ومنه نستنتج أن : $a=-8$ و $b=25$ .

**طريقة 2 :** تكون حدوديتان مختصرتان متساويتين إذا وفقط إذا كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

$$P(z)=(z-3i)(z^2+az+b) \Leftrightarrow P(z)=z^3+az^2+bz-3iz^2-3aiz-3bi$$
$$\Leftrightarrow P(z)=z^3+(a-3i)z^2+(b-3ai)z-3bi$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3i=-8-3i \\ b-3ai=25+24i \\ -3bi=-75i \end{cases}$$
$$P(z)=(z-3i)(z^2+az+b) \Leftrightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=25 \end{cases}$$

4. في المستوى العقدي $\mathscr{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ التي ألحاقها على التوالي هي: $z_A=-1+2i$ و $z_B=4+3i$ و $z_C=3i$ و $z_D=4-3i$ .

أ- تمثيل النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ في المستوى العقدي $\mathscr{P}$ :




ب- لدينا :

$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{3i-(-1+2i)}{4-3i-(-1+2i)} = \frac{1+i}{5-5i} = \frac{i(1-i)}{5(1-i)} = \boxed{\frac{1}{5}i}$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{3i-(4+3i)}{4-3i-(4+3i)} = \frac{-4}{-6i} = \frac{2}{3i} = \frac{2i}{3i^2} = \boxed{-\frac{2}{3}i}$$

ج- لدينا : $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A} = \frac{1}{5}i = \left[\frac{1}{5}, \frac{\pi}{2}\right]$ . إذن : $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}) \equiv \boxed{\frac{\pi}{2}} \; [2\pi]$ . ومنه فإن المثلث $ACD$ قائم الزاوية في $A$.

ولدينا: $\frac{z_C-z_B}{z_D-z_B} = -\frac{2}{3}i = \left[\frac{2}{3}, -\frac{\pi}{2}\right]$ . إذن : $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}) \equiv \boxed{-\frac{\pi}{2}} \; [2\pi]$ . ومنه فإن المثلث $BCD$ قائم الزاوية في النقطة $B$.

د- بما أن $ACD$ مثلث قائم الزاوية في $A$ ، فإنه محاط بالدائرة $(\Gamma)$ التي أحد أقطارها $[CD]$ ، وبما أن $BCD$ مثلث قائم الزاوية في $B$ ، فإنه محاط بالدائرة التي أحد أقطارها $[CD]$ ، أي بالدائرة $(\Gamma)$ . وبالتالي فإن النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ تنتمي إلى الدائرة $(\Gamma)$ ، و

لدينا : مركز الدائرة $(\Gamma)$ هو النقطة $\Omega$ منتصف القطعة $[CD]$ والتي لحقها: $z_\Omega = \frac{z_C+z_D}{2} = \frac{3i+4-3i}{2} = \boxed{2}$ .

شعاع الدائرة $(\Gamma)$ هو $R = \Omega A = |z_A - z_\Omega| = |-1+2i-2| = |-3+2i| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \boxed{\sqrt{13}}$ .

5. لدينا :

$$t_{\overrightarrow{AD}}(C)=E \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CE}$$
$$\Leftrightarrow z_D - z_A = z_E - z_C$$

إذن : $z_E = z_D - z_A + z_C = 4-3i-(-1+2i)+3i = \boxed{5-2i}$ .

## التمرين الثالث :

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\ln(1-x^3) & ; \quad x<0 \\ f(x)=4x\sqrt{x}-3x^2 & ; \quad x\geq 0 \end{cases}$$

وليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوى $(\mathscr{P})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1. أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} 4x\sqrt{x}-3x^2=f(0)$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} \ln(1-x^3)=\ln 1=0=f(0)$

إذن : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$ . ومنه فإن $f$ دالة متصلة في النقطة 0 .

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{4x\sqrt{x}-3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^+} 4\sqrt{x}-3x=0$ .

إذن $f$ قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 و $\boxed{f_d'(0)=0}$ .

نضع $t=(-x)^3$ . إذن $t\underset{x\mapsto0^-}{\to}0^+$ . ومنه فإن :

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1-x^3)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln\left(1+(-x)^3\right)}{(-x)^3}\times(-x^2)=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)}{t}\times\left(-\sqrt[3]{t^2}\right)=0$$

إذن $f$ قابلة للإشتقاق على اليسار في 0 و $\boxed{f_g'(0)=0}$ .

وبما أن $f_g'(0)=f_d'(0)=0$ ، فإن $f$ قابلة للإشتقاق في النقطة 0 ولدينا : $\boxed{f'(0)=0}$ .

2. ليكن $x\in]-\infty,0[$ . لدينا : $f'(x)=\left(\ln(1-x^3)\right)'=\dfrac{(1-x^3)'}{1-x^3}=\boxed{\dfrac{-3x^2}{1-x^3}}<0$ ، لأن : $-3x^2<0$ و $1-x^3>0$ .

إذن $f$ دالة تناقصية على المجال $]-\infty,0[$ .

ليكن $x\in]0,+\infty[$ . لدينا : $f'(x)=\left(4x\sqrt{x}-3x^2\right)'=4\left(x'\sqrt{x}+x\left(\sqrt{x}\right)'\right)-6x=4\left(\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)-6x$

$$f'(x)=4\left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)-6x=\sqrt{x}-6x=6\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)=\boxed{\frac{6\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}(1-x)}$$

ومنه فإن إشارة $f'(x)$ على المجال $]0,+\infty[$ هي إشارة $1-x$ ، ولدينا :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

إذن $f$ دالة تناقصية على المجال $[1,+\infty[$ ، و تزايدية على المجال $[0,1]$ .

3. أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 4x\sqrt{x}-3x^2=\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left(4-3\sqrt{x}\right)=(+\infty)\times(-\infty)=\boxed{-\infty}$ .

نضع $t=1-x^3$ . إذن $t\underset{x\mapsto-\infty}{\to}+\infty$ ، ومنه فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln(1-x^3)=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=\boxed{+\infty}$ .

ب- ليكن $x\in]-\infty,0[$ . لدينا :

$$3\frac{\ln(-x)}{x}+\frac{\ln(1-x^{-3})}{x}=\frac{\ln\left((-x)^3\right)+\ln(1-x^{-3})}{x}=\frac{\ln(-x^3)+\ln(1-x^{-3})}{x}$$
$$=\frac{\ln\left(-x^3(1-x^{-3})\right)}{x}=\frac{\ln(1-x^3)}{x}=\frac{f(x)}{x}$$

جـ- نعلم أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ .

ولدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x\sqrt{x}-3x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(4-3\sqrt{x}\right) = \boxed{-\infty}$ .

إذن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل **فرعا شلجميا**، بجوار $+\infty$ ، **اتجاهه محور الأراتيب**.

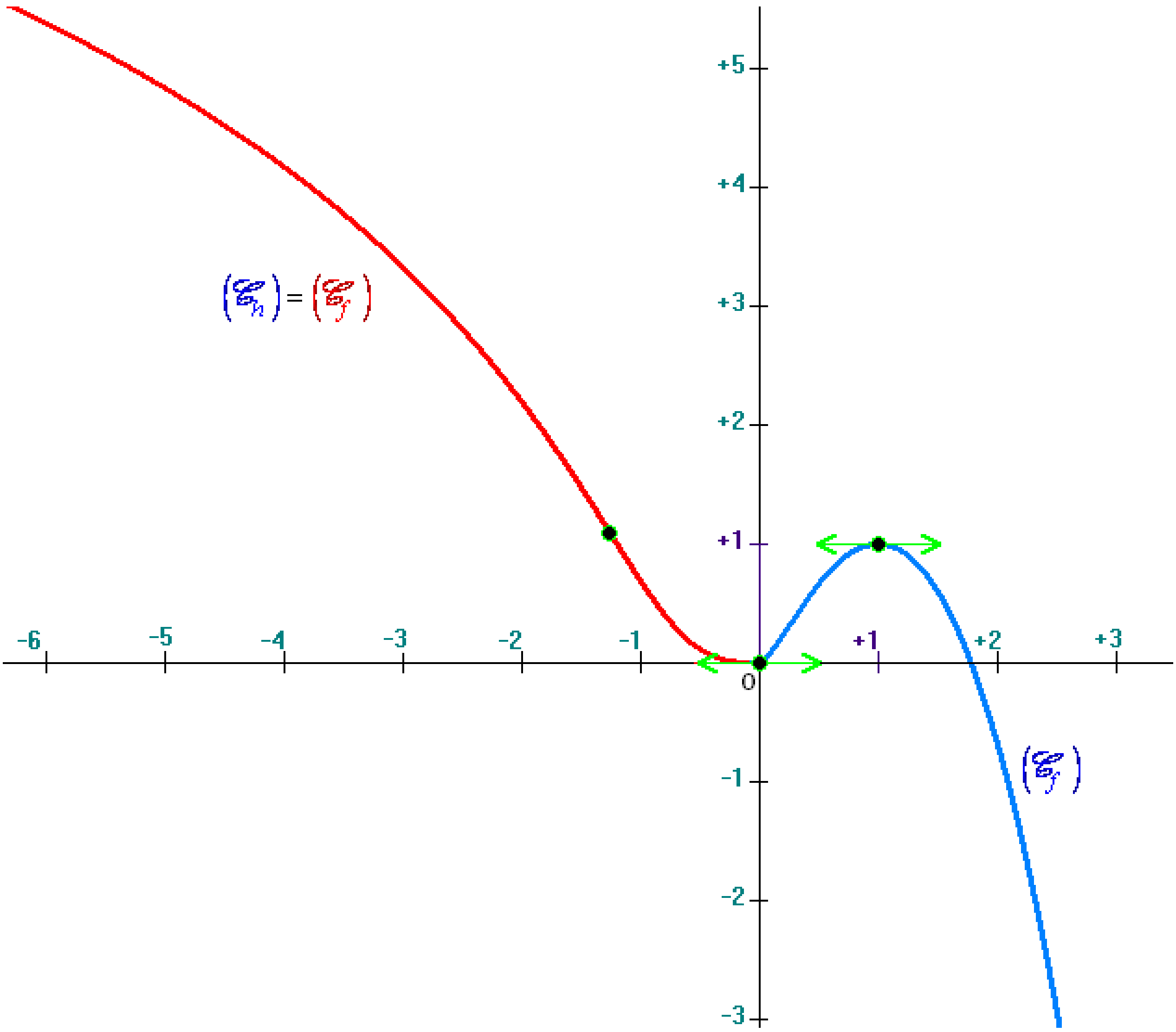
ونعلم أن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ .

نضع $t=-x$ . إذن $t \underset{x\mapsto-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ .

ومنه فإن : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 3\frac{\ln(-x)}{x} + \frac{\ln\left(1-x^{-3}\right)}{x} = \lim_{t\to+\infty} -3\frac{\ln t}{t} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{t^3}\right)}{t} = \boxed{0}$ .

إذن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل **فرعا شلجميا**، بجوار $-\infty$ ، **اتجاهه محور الأفاصيل**.

4. إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ :




5. أ- لدينا $h$ دالة متصلة وتناقصية قطعا على المجال $]-\infty,0[$ . إذن $h$ تقبل دالة عكسية $h^{-1}$ معرفة من المجال

$J = h\left(]-\infty,0[\right) = \left]\lim_{x\to0^+} h(x), \lim_{x\to-\infty} h(x)\right[ = ]0,+\infty[$ نحو المجال $I = ]-\infty,0[$ .

ب- لدينا :

$$\begin{array}{rccc} h^{-1} : & ]0,+\infty[ & \to & ]-\infty,0[ \\ & x & \mapsto & y = h^{-1}(x) \end{array}$$

ليكن $x \in ]0,+\infty[$ و $y \in ]-\infty,0[$ بحيث : $y = h^{-1}(x)$ ينبغي تحديده بدلالة $x$ ؟

$$\begin{aligned}
y = h^{-1}(x) &\Leftrightarrow h(y) = x \\
&\Leftrightarrow \ln(1-y^3) = x \\
&\Leftrightarrow 1-y^3 = e^x \\
&\Leftrightarrow -y^3 = e^x - 1 \\
&\Leftrightarrow (-y)^3 = e^x - 1 \\
&\Leftrightarrow (-y)^3 = e^x - 1 \\
&\Leftrightarrow -y = \sqrt[3]{e^x - 1} \quad , \quad (!) \quad y < 0 \\
y = h^{-1}(x) &\Leftrightarrow y = -\sqrt[3]{e^x - 1}
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن : $\boxed{h^{-1}(x) = -\sqrt[3]{e^x - 1}}$ : $\forall x \in ]0,+\infty[$

6. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{4}{9} \\ u_{n+1} 4u_n\sqrt{u_n} - 3u_n^2 = f(u_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = \dfrac{4}{9}$ ، إذن : $\dfrac{4}{9} \le u_0 \le 1$ .

ليكن $n \in \mathbb{N}$ . – نفترض أن : $\dfrac{4}{9} \le u_n \le 1$ .

– نبين أن : $\dfrac{4}{9} \le u_{n+1} \le 1$ .

لدينا : $f$ تزايدية على المجال $\left[\dfrac{4}{9},1\right]$ .

إذن : $\dfrac{4}{9} \le u_n \le 1 \Rightarrow f\left(\dfrac{4}{9}\right) \le f(u_n) \le f(1) \Rightarrow \dfrac{48}{81} \le u_{n+1} \le 1 \Rightarrow \dfrac{4}{9} \le u_{n+1} \le 1$

لأن : $\dfrac{4}{9} \le \dfrac{48}{81}$ .

وبالتالي فإن : $\boxed{\dfrac{4}{9} \le u_n \le 1}$ : $\forall n \in \mathbb{N}$ .

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$ . لدينا :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 4u_n\sqrt{u_n} - 3u_n^2 - u_n = u_n\left(4\sqrt{u_n} - 3u_n - 1\right) \\
&= u_n\left[3\sqrt{u_n} - 3u_n + \sqrt{u_n} - 1\right] = u_n\left[3\sqrt{u_n}\left(1-\sqrt{u_n}\right) - \left(1-\sqrt{u_n}\right)\right] \\
u_{n+1} - u_n &= u_n\left(1-\sqrt{u_n}\right)\left(3\sqrt{u_n} - 1\right)
\end{aligned}$$

وبما أن $\dfrac{4}{9} \le u_n \le 1$ ، فإن : $u_n \ge 0$ و $u_n \le 1 \Rightarrow \sqrt{u_n} \le 1 \Rightarrow 1-\sqrt{u_n} \ge 0$

و : $\dfrac{2}{3} \le \sqrt{u_n} \le 1 \Rightarrow 2 \le 3\sqrt{u_n} \le 3 \Rightarrow 1 \le 3\sqrt{u_n} - 1 \le 2$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; u_{n+1} - u_n \ge 0$ . ومنه فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية.

**طريقة 2 :** **البرهان بالترجع .**

✓ من أجل $n=0$ ، لدينا : $u_0=\frac{4}{9}$ و $u_1=f(u_0)=f\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{48}{81}$ . إذن : $u_1\geq u_0$ .

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$ . – نفترض أن : $u_{n+1}\geq u_n$ .

– ونبين أن : $u_{n+2}\geq u_{n+1}$.

نعلم أن $f$ تزايدية على المجال $\left[\frac{4}{9},1\right]$ وأن $\frac{4}{9}\leq u_n\leq 1$ : $\forall n\in\mathbb{N}$.

إذن :

$$\begin{aligned} u_{n+1}\geq u_n &\Rightarrow f(u_{n+1})\geq f(u_n)\\ &\Rightarrow u_{n+2}\geq u_{n+1}\end{aligned}$$

✓ وبالتالي فإن : $u_{n+1}\geq u_n$ : $\forall n\in\mathbb{N}$.

وعليه فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية.

جـ- بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 1 ، فإنها متقاربة ، وبما أن :

✓ $f$ متصلة على المجال $\left[\frac{4}{9},1\right]$ .

✓ $f$ متصلة وتزايدية قطعا على المجال $\left[\frac{4}{9},1\right]$ . إذن : $f\left(\left[\frac{4}{9},1\right]\right)=\left[f\left(\frac{4}{9}\right),f(1)\right]=\left[\frac{48}{81},1\right]\subset\left[\frac{4}{9},1\right]$ .

✓ $u_0=\frac{4}{9}\in\left[\frac{4}{9},1\right]$ .

✓ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها $l$.

فإن : $l=f(l)$ و $l\in\left[\frac{4}{9},1\right]$ .

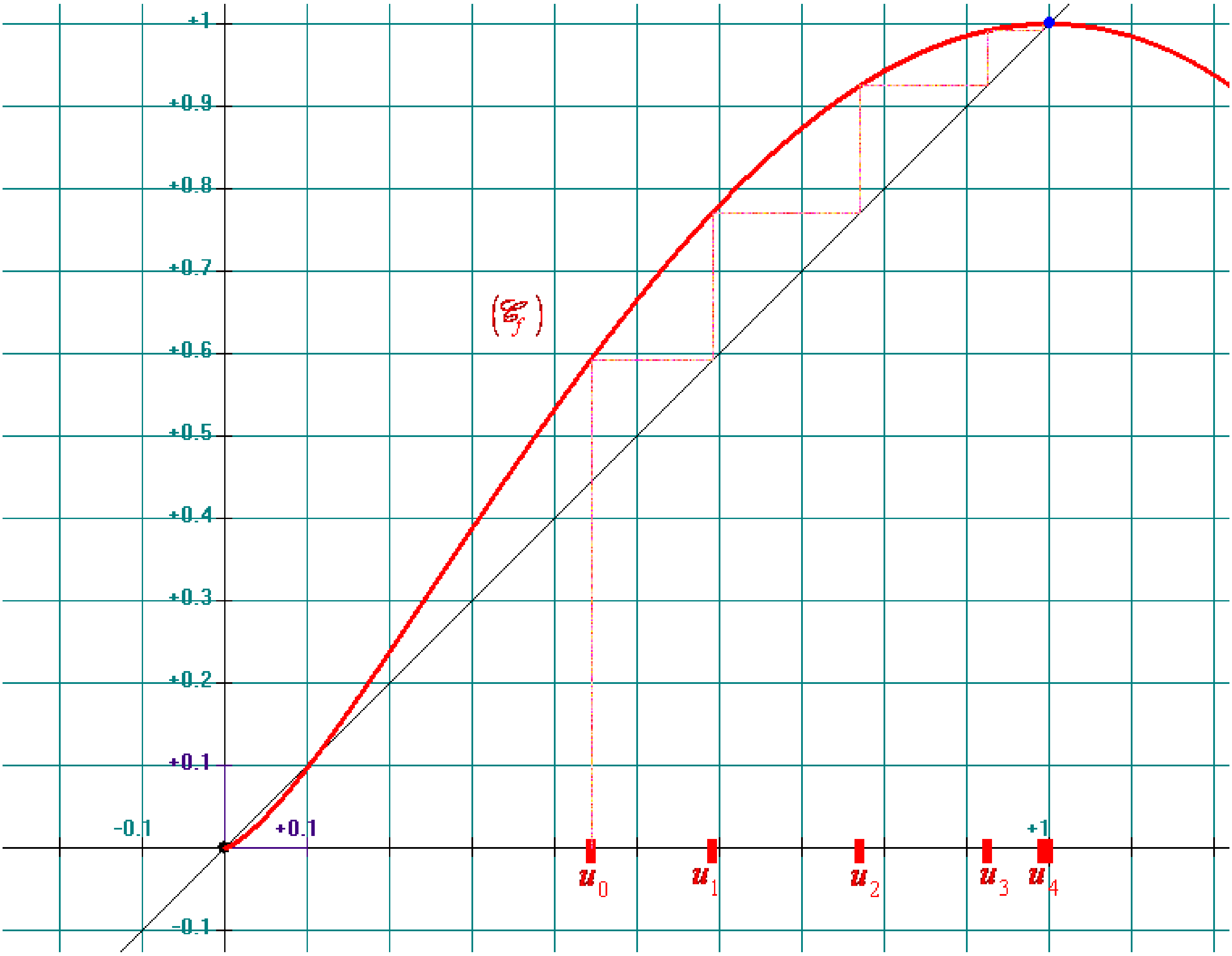
$$\begin{aligned} f(l)=l &\Leftrightarrow 4l\sqrt{l}-3l^2-l=0\\ &\Leftrightarrow l\left(\sqrt{l}-1\right)\left(3\sqrt{l}-1\right)=0\end{aligned}$$

$$f(l)=l \Leftrightarrow l=0 \text{ أو } l=1 \text{ أو } l=\frac{1}{9}$$

وبما أن : $l\in\left[\frac{4}{9},1\right]$ ، فإن : $l=1$ . وبالتالي فإن : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=1}$.

**تمثيل حدود المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ على محور الأفاصيل :** باستعمال البرنام **Archimède II plus**

**حساب الحدود الثمانية الأولى للمتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى $10^{-39}$ :** باستعمال البرنام **Maple 8**




```
> f:=x->4*x*sqrt(x)-3*x^2;
```

$$f := x \rightarrow 4\,x\,\sqrt{x} - 3\,x^2$$

```
> u||0:=4/9;
```

$$u0 := \frac{4}{9}$$

```
> for n from 0 to 7 do u||(n+1):=evalf ( f(u||n),40) end do;
>
```

$$u1 := .5925925925925925925925925925925925925926$$

$$u2 := .7712140194964303997655401787057750038570$$

$$u3 := .9247701451602197326158548026141754153920$$

$$u4 := .9916202658372601288144754474477286897920$$

$$u5 := .9998948176533726249213081014285133390640$$

$$u6 := .9999999834053018650620684499257125957820$$

$$u7 := .9999999999999995869239918579099248198650$$

$$u8 := .9999999999999999999999999999999744052317$$

R

ثانوية محمد رضا السلاوى
اكادير

الأستاذة نعيمة الزر هوني
المستوى 2ب ع ت/ 2004

# امتحان تجريبي
## - مادة الرياضيات-

**تمرين 1**

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(0,0,1)$ و $B(1,1,0)$ و $C(0,-1,-1)$

**1**- أ- أحسب $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$

ب – حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

**2**- نعتبر الفلكة (S) ذات المعادلة $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4=0$

أ- حدد مركزها و شعاعها

ب- بين أن(ABC) و (S) يتقاطعان في دائرة محددا مركزها و شعاعها.

**تمرين 2**

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ بحيث : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = 2u_n \end{cases}$

1 – أحسب $u_2$ و $u_3$ و $u_4$ و $u_5$

تكتب النتائج على الشكل ( $2^r$ , $r\in Q$ )

2- نعتبر المتتالية العددية $(v_n)$ بحيث : $v_n = \ln(u_n) - \ln 2$

أ- بين أن $(v_n)$ هندسية محددا أساسها و حدها الأول.

ب- أحسب $v_n$ ثم $u_n$ بدلالة n

ج- أحسب $\lim u_n$

**تمرين3**

يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و 3 كرات خضراء . نسحب من الصندوق الكرة تلو الأخرى .

1- أحسب عدد النتائج الممكنة

2- ليكن X المتغير العشوائي الدى يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة قبل سحب أول كرة خضراء

أ- حدد قانون احتمال X و أحسب E(X)

ب- مثل دالة التجزئ ثم أحسب V(X) و $\sigma(X)$

R

**تمرين4**

ليكن $\theta$ عددا حقيقيا $(\theta \in \Re^*)$

1- حل في $C$ المعادلة : $(E) \quad z^2 - 2^{\theta+1}\cos\theta\, z + 2^{2\theta} = 0$

2- المستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$ .

لتكنA و B نقطتين لحقيهما $z_1$ و $z_2$ , حدد $\theta$ لكي يكون المثلث OAB متساوي أضلاع.

**مسالة**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\Re^*$ كالتالي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x}e^{x-1} & : \quad x<1 \quad x \neq 0 \\ f(x) = 1-(\ln x)^3 & : \quad x \geq 1 \end{cases}$$

**1**- أ- بين أن f متصلة في 1 .

ب- أحسب نهايات fعند محددات $D_f$.

**2** – أدرس الفروع اللانهائية ل $(C_f)$ منحى f.

**3**- أ- بين أن f قابلة للاشتقاق في 1.

ب- أدرس تغيرات fثم أعط جدول تغيرات f.

**4**- أ- حدد نقط انعطاف $(C_f)$ ادا كان $x \geq 1$

ب- أنشئ $(C_f)$ .

**5**- أ- بين أن h قصور f على المجال $I = ]1,+\infty[$ تقابل من I نحو مجال يتم تحديده.

ب- حدد $h^{-1}(x)$ .

**6**- أ- أحسب باستعمال مكاملة بالإجراء $I = \int_1^e (\ln x)^2\, dx$ و $I = \int_1^e (\ln x)^3\, dx$

ب- أحسب مساحة الحيز $\Delta$ الذي يحده $(C_f)$ ومحور الأفاصيل والمستقيمان $(D) : x=1$ و $(D') : x=e$

R

# عناصر الإجابة

## تمرين 1

**1-** أ- $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (-3,2,-1)$

ب- $(ABC): 3x - 2y + z - 1 = 0$

**2-** أ- $r = 1$ و $\Omega(1,2,0)$

ب- $d = d(\Omega,(ABC)) = \dfrac{\sqrt{14}}{7}$

$d < 1$ ادن $(S) \cap (ABC) = C_{(H,R)}$

$H(\frac{11}{7},\frac{12}{7},\frac{1}{7})$ و $R = \sqrt{\frac{5}{7}}$

## تمرين2

**-1**

$$u_5 = 2^{15/16} \ , u_4 = 2^{7/8} \quad , \ u_3 = 2^{3/4} \ , \ u_2 = 2^{1/2}$$

**2-** ا-

$$v_1 = -\ln 2 \quad \text{و} \quad q = \frac{1}{2} \ , \ v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$

ب-

$$\lim u_n = 2 \ , \ u_n = 2.e^{-(\frac{1}{2})^{n-1}(\ln 2)} \ , \ v_n = -(\ln 2)(\frac{1}{2})^{n-1}$$

## تمرين 3

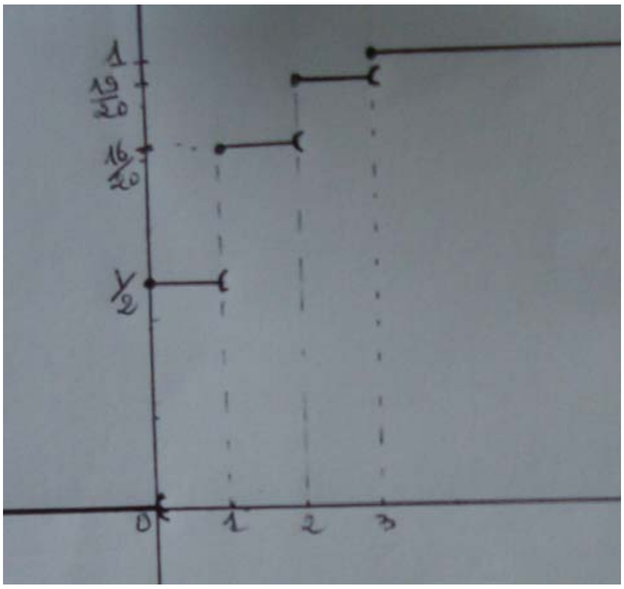
**1-** عدد النتائج الممكنة : $Card\Omega = 720 = 6!$

**2 -** أ- $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

$$p(X=3) = \frac{1}{2} \ , \ p(X=2) = \frac{3}{20} \ , p(X=1) = \frac{A_3^1.A_3^1.4!}{6!} = \frac{3}{10} \ , \ p(X=0) = \frac{A_3^1.5!}{6!} = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = \frac{15}{20} = 0{,}75$$

ب- $\sigma(X) = \dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{7}{5}} \quad , \quad V(X) = \dfrac{63}{80}$




**تمرين4**

**-1** $\Delta' = (i2^{\theta} \sin\theta)^2 \quad \Leftarrow \quad z_1 = [2^{\theta}, \theta] \ , \ z_2 = [2^{\theta}, -\theta]$

**-2** $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = 2\theta \ , \ 2\theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

أي $|z_1| = |z_2| = 2^{\theta} \ , \ \theta = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

**مسالة**

**-1** أ- $f$ متصلة في 1.

ب- $\lim\limits_{0^-} f(x) = -\infty \ , \ \lim\limits_{0^+} f(x) = +\infty \ , \ \lim\limits_{+\infty} f(x) = -\infty \ , \ \lim\limits_{-\infty} f(x) = 0$

**2 -** $(D): y = 0$ مقارب أفقي بجوار $-\infty$

$(\Delta): x = 0$ مقارب عمودي

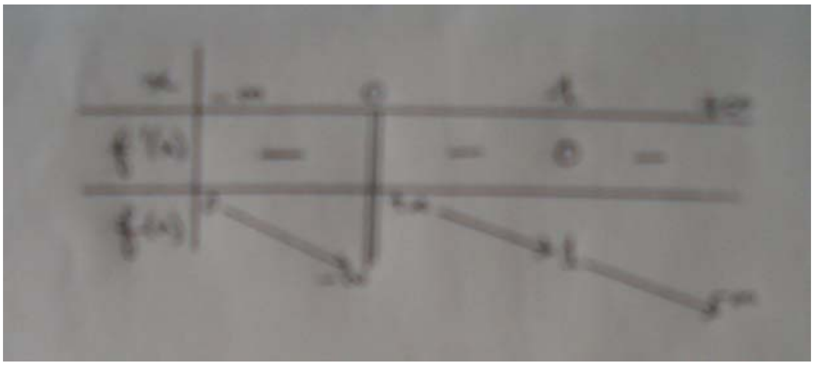
$(C_f)$ يقبل فرعا شلمجيا باتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

**-3** أ- fقابلة للاشتقاق في 1 : $f_g'(x) = f_d'(x) = 0$

ب-

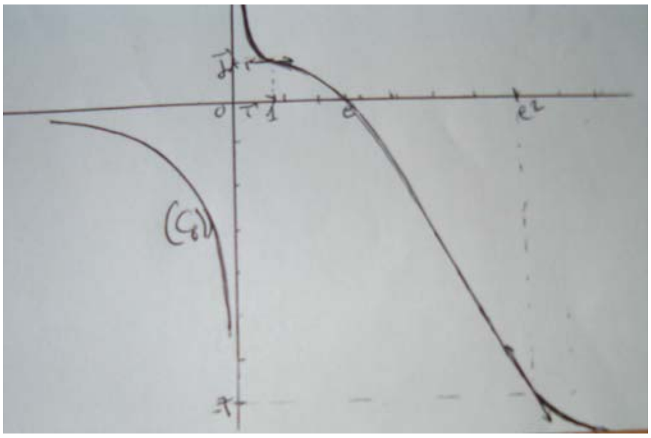
$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2}.e^{x-1} \quad , \ x < 1$$

$$f'(x) = \frac{-3(\ln x)^2}{x} \quad , \ x > 1$$



**4 -** $f''(x)=\dfrac{3\ln x}{x^2}(\ln x-2)$

نقطتي الانعطاف $H_1(1,1)$ , $H_2(e,-7)$



**5-** أ- h متصلة و تناقصية قطعا على $I=]1,+\infty[$ , ادن h تقابل من Iنحو $]-\infty,1[$ .

ب- $f^{-1}(x)=e^{\sqrt[3]{1-x}}$

**6-** أ- $J=e-2$ , $K=6-2e$

ب- $\int_1^e(1-(\ln x)^3)dx=3e-7$ و منه $A(\Delta)=(3e-7)4a$ .

## <u>سلم التنقيط</u>

**مسالة** 1) أ- 0,5 نقطة , ب- 1 نقطة
2) 1 نقطة
3) أ- 1 نقطة , ب- 1,5 نقطة
4) أ- 0,5 نقطة , ب- 1 نقطة
5) أ- 0,5 نقطة , ب- 0,5 نقطة

6) أ-1 نقطة , ب- 1 نقطة

**<u>تمرين1</u>** 1) أ- 0,5 نقطة , ب- 0,5 نقطة
2) أ- 0,5 نقطة , ب- 1 نقطة

**<u>تمرين2</u>** 1) 0,5 نقطة
2) أ- 1 نقطة , ب- 0,5 نقطة , ج) 0,5 نقطة

**<u>تمرين3</u>** 1) 1 نقطة
2) أ- 1,5 نقطة, ب- 1 نقطة

**<u>تمرين4</u>** 1) 1 نقطة ة 2) 1,5 نقطة

R

| 1 | المادة : الرياضيات<br>الشعبة : علوم تجريبية<br>مدة الإنجاز: 3 ساعات<br>المعامل: 7 | الامتحان التجريبي لنيل شهادة البكالوريا<br>دورة أبريل 2007 | أكاديمية مراكش تانسيفت الحوز<br>نيابة شيشاوة<br>مجاط<br>ثانوية الخوارزمي التأهيلية |
|---|---|---|---|
| 2 | | | |

(يسمح باستعمال الآلة غير قابلة للبرمجة)

**التمرين الأول : (2.5ن)**

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ , نعتبر النقطتين: $A(-2;2;-4)$
و $B(4;-4;2)$ و المستوى $(P)$ الذي معادلته $x-y+z+2=0$

1ن 1) حدد معادلة ديكارتية للفلكة $(S)$ التي أحد أقطارها $[AB]$, ثم حدد شعاعها $r$ و مركزها $\Omega$.

0.5ن 2) حدد معادلة المستوى $(Q)$ المماس للفلكة $(S)$ في النقطة $A$.

1ن 3) أحسب $d(\Omega;(P))$, ثم استنتج أن المستوى $(P)$ يقطع الفلكة $(S)$ وفق دائرة $(C)$ حدد مركزها $H$ وشعاعها $R$.

**التمرين الثاني: (3.5ن)**

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): z^2-2(\sqrt{3}-i)z+2(3-i\sqrt{3})=0$

1ن 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$

2) نعتبر العددين $u=\sqrt{3}+i$ و $v=\sqrt{3}-3i$

0.5ن أ ـ حدد الشكل المثلثي للعددين $u$ و $v$

0.25ن ب ـ أحسب $\left(\frac{u}{2}\right)^{2000}$

3) نعتبر النقط $A(u)$ و $B(-u)$ و $C(v)$ و $D(\bar{v})$

0.75ن أ ـ حدد الشكل الجبري للعدد $\frac{u-\bar{v}}{u-v}$ واستنتج أن النقط $A$ و $C$ و $D$ مستقيمية .

0.75ن ب ـ تحقق أن $\frac{v-u}{v+u}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ استنتج قياس الزاوية $[\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}]$

0.25ن ج ـ استنتج طبيعة المثلث $ABC$

**التمرين الثالث: (3ن)**

نعتبر صندوقين $U$ و $V$

الصندوق $U$ يحتوي على 5 كرات بيضاء و 3 سوداء

الصندوق $V$ يحتوي على 3 كرات بيضاء وكرتين سوداويتين وكرة حمراء

1) نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق $U$ ونسحب كرة من الصندوق $V$

0.5ن أ) ما هو احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون ؟

0.5ن ب) ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء فقط ؟

1ن ج) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يربط كل إمكانية بعدد الكرات البيضاء المسحوبة.
حدد قانون احتمال $X$

1ن 2) نكرر التجربة السابقة 5 مرات متتالية .
ما هو احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون 3مرات بالضبط ؟

R

| | | | |
|---|---|---|---|
| أكاديمية مراكش تانسيفت الحوز<br>نيابة شيشاوة<br>مجاط<br>ثانوية الخوارزمي التأهيلية | الامتحان التجريبي لنيل شهادة البكالوريا<br>دورة أبريل 2007 | المادة : الرياضيات<br>الشعبة : علوم تجريبية<br>مدة الإنجاز: 3 ساعات<br>المعامل: 7 | 2<br>2 |

مسألة: (11ن)

لتكن $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2\ln(x) - x^2 + 1 & x > 0 \\ f(x) = 2e^{-x} + 2e^{x} - 3 & x \geq 0 \end{cases}$$

وليكن $C_f$ منحنى الدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i},\vec{j})$

**الجزء الاول :**

1) أدرس اتصال الدالة $f$ في 0 — 0.5ن

2) أ - حدد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ — 0.5ن

ب - أدرس الفروع الانهائية ل $C_f$ — 0.5ن

3) أ - أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على يمين وعلى يسار 0 وأول النتيجتين هندسيا — 0.5ن

ب - بين أن — 1ن

$$\begin{cases} f'(x) = 4x\ln(x) & x > 0 \\ f'(x) = \dfrac{2(e^{2x}-1)}{e^{x}} & x < 0 \end{cases}$$

ج - استنتج تغيرات الدالة $f$ وأعط جدول تغيرات الدالة $f$ — 1ن

4) أ - بين أن — 1ن

$$\begin{cases} f''(x) = 4\ln(x) + 4 & x > 0 \\ f''(x) = \dfrac{2(e^{2x}+1)}{e^{x}} & x < 0 \end{cases}$$

ب - أدرس تقعر $C_f$ واستنتج نقط انعطافه — 0.75ن

5) أنشئ $C_f$ — 1ن

6) ليكن $g$ قصور الدالة $f$ على $I = ]-\infty;0[$

أ - بين أن $g$ تقابل من $I$ نحو مجال $J$ حدده — 0.5ن

ب - حدد $g^{-1}(x)$ لكل $x$ من $J$ — 1ن

ج - أنشئ $C_{g^{-1}}$ منحنى الدالة $g^{-1}$ في نفس المعلم $(o;\vec{i},\vec{j})$ — 0.5ن

**الجزء الثاني :**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ (\forall n \in N) \quad u_{n+1} = f(\ln(\dfrac{1}{u_n})) \end{cases}$$

1) بين أن $(\forall n \in N) \quad 1 \prec u_n \prec 2$ — 0.5ن

2) بين أن $(u_n)$ تناقصية قطعا — 0.75ن

3) استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة وحدد نهايتها — 1ن

R

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | المادة : الرياضيات<br>الشعبة : علوم تجريبية<br>مدة الإنجاز: 3 ساعات<br>المعامل: 7 | الامتحان التجريبي لنيل شهادة البكالوريا<br>دورة أبريل 2007 | أكاديمية مراكش تانسيفت الحوز<br>نيابة شيشاوة<br>مجاط<br>ثانوية الخوارزمي التأهيلية |
| 2 | | | |

(يسمح باستعمال الآلة غير قابلة للبرمجة)

**التمرين الأول : (2.5ن)**

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ , نعتبر النقطتين: $A(-2;2;-4)$
و $B(4;-4;2)$ و المستوى $(P)$ الذي معادلته $x-y+z+2=0$

1ن — 1) حدد معادلة ديكارتية للفلكة $(S)$ التي أحد أقطارها $[AB]$ , ثم حدد شعاعها $r$ و مركزها $\Omega$ .

0.5ن — 2) حدد معادلة المستوى $(Q)$ المماس للفلكة $(S)$ في النقطة $A$ .

1ن — 3) أحسب $d(\Omega;(P))$ , ثم استنتج أن المستوى $(P)$ يقطع الفلكة $(S)$ وفق دائرة $(C)$ حدد مركزها $H$ وشعاعها $R$ .

**التمرين الثاني: (3.5ن)**

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): z^2-2(\sqrt{3}-i)z+2(3-i\sqrt{3})=0$

1ن — 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$

2) نعتبر العددين $u=\sqrt{3}+i$ و $v=\sqrt{3}-3i$

0.5ن — أ ـ حدد الشكل المثلثي للعددين $u$ و $v$

0.25ن — ب ـ أحسب $\left(\frac{u}{2}\right)^{2000}$

3) نعتبر النقط $A(u)$ و $B(-u)$ و $C(v)$ و $D(\bar{v})$

0.75ن — أ ـ حدد الشكل الجبري للعدد $\frac{u-\bar{v}}{u-v}$ واستنتج أن النقط $A$ و $C$ و $D$ مستقيمية .

0.75ن — ب ـ تحقق أن $\frac{v-u}{v+u}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ استنتج قياس الزاوية $[\widehat{\vec{CA},\vec{CB}}]$

0.25ن — ج ـ استنتج طبيعة المثلث $ABC$

**التمرين الثالث: (3ن)**

نعتبر صندوقين $U$ و $V$
الصندوق $U$ يحتوي على 5 كرات بيضاء و 3 سوداء
الصندوق $V$ يحتوي على 3 كرات بيضاء وكرتين سوداويتين وكرة حمراء

1) نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق $U$ ونسحب كرة من الصندوق $V$

0.5ن — أ) ما هو احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون ؟

0.5ن — ب) ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء فقط ؟

1ن — ج) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يربط كل إمكانية بعدد الكرات البيضاء المسحوبة.
حدد قانون احتمال $X$

1ن — 2) نكرر التجربة السابقة 5 مرات متتالية .
ما هو احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون 3 مرات بالضبط ؟

R

| | | | |
|---|---|---|---|
| أكاديمية مراكش تانسيفت الحوز<br>نيابة شيشاوة<br>مجاط<br>ثانوية الخوارزمي التأهيلية | الامتحان التجريبي لنيل شهادة البكالوريا<br>دورة أبريل 2007 | المادة : الرياضيات<br>الشعبة : علوم تجريبية<br>مدة الإنجاز: 3 ساعات<br>المعامل: 7 | 2<br>2 |

مسألة: (11ن)

لتكن $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2\ln(x) - x^2 + 1 & x > 0 \\ f(x) = 2e^{-x} + 2e^{x} - 3 & x \geq 0 \end{cases}$$

وليكن $C_f$ منحنى الدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i},\vec{j})$

**الجزء الاول :**

1) أدرس اتصال الدالة $f$ في 0 — 0.5ن

2) أ - حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ — 0.5ن

ب - أدرس الفروع الانهائية ل $C_f$ — 0.5ن

3) أ - أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على يمين وعلى يسار 0 وأول النتيجتين هندسيا — 0.5ن

ب - بين أن — 1ن

$$\begin{cases} f'(x) = 4x\ln(x) & x > 0 \\ f'(x) = \dfrac{2(e^{2x}-1)}{e^{x}} & x < 0 \end{cases}$$

ج - استنتج تغيرات الدالة $f$ وأعط جدول تغيرات الدالة $f$ — 1ن

4) أ - بين أن — 1ن

$$\begin{cases} f''(x) = 4\ln(x) + 4 & x > 0 \\ f''(x) = \dfrac{2(e^{2x}+1)}{e^{x}} & x < 0 \end{cases}$$

ب - أدرس تقعر $C_f$ واستنتج نقط انعطافه — 0.75ن

5) أنشئ $C_f$ — 1ن

6) ليكن $g$ قصور الدالة $f$ على $I = ]-\infty;0[$

أ - بين أن $g$ تقابل من $I$ نحو مجال $J$ حدده — 0.5ن

ب - حدد $g^{-1}(x)$ لكل $x$ من $J$ — 1ن

ج - أنشئ $C_{g^{-1}}$ منحنى الدالة $g^{-1}$ في نفس المعلم $(o;\vec{i},\vec{j})$ — 0.5ن

**الجزء الثاني :**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ (\forall n\in N)\quad u_{n+1} = f(\ln(\dfrac{1}{u_n})) \end{cases}$$

1) بين أن $(\forall n\in N)\quad 1 \prec u_n \prec 2$ — 0.5ن

2) بين أن $(u_n)$ تناقصية قطعا — 0.75ن

3) استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة وحدد نهايتها — 1ن